فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران
سال هجدهم، شماره ٥٤، بهار ١٣٩٢، صفحات ١٥٢-١١٩

برآورد ارزش در معرض خطر سبد سهام با استفاده از روش گارچ کاپولای شرطی

میرحسین موسوی*، حسین راغفر و منصوره محسنی*****

تاریخ دریافت: ۳۰ تیر ۱۳۹۲ تاریخ پذیرش: ۱۴ آبان ۱۳۹۲

هدف این مقاله برآورد ارزش در معرض خطر یک سبد سهام منتخب است. برای این منظور از روش گارچ[1] کاپولای شرطی[2] استفاده شده است که ترکیبی از توزیع کاپولا و تابع پیش‌بینی حاصل از مدل‌سازی گارچ است. در این روش با اتکاء به تئوری کاپولا توزیع مشترکی برای دارایی‌ها در نظر گرفته می‌شود که فارغ از هرگونه فرض نرمال‌بودن و همبستگی خطی است. داده‌های مورد بررسی، قیمت‌های روزانه سبد دارایی یک شرکت سرمایه‌گذاری منتخب متشکل از ۱۷ سهم است. بازه زمانی مورد بررسی از تاریخ ۱۳۸۶/۷/۳ تا ۱۳۹۰/۱۲/۲۴ می‌باشد. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که مدل کاپولای گوسی با توزیع حاشیه‌ای نرمال و کاپولای گوسی با توزیع حاشیه‌ای تی‌استودنت عملکرد مناسبی نسبت به روش‌های شبیه‌سازی تاریخی و واریانس-کوواریانس در برآورد ارزش در معرض خطر دارند. هر دو مدل دارای سطح اطمینان ۹۹ و ۹۵ درصد هستند.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض خطر، مدل‌های گارچ، کاپولا، آزمون کوپیک.
طبقه‌بندی JEL: C53، C58، C02، G17.

---

* استادیار دانشگاه الزهراء(س) – دانشکده علوم اجتماعی و اقتصادی-گروه اقتصاد hmousavi_atu@yahoo.com
** استادیار دانشگاه الزهراء(س) – دانشکده علوم اجتماعی و اقتصادی-گروه اقتصاد raghhg@yahoo.co.uk
*** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد دانشگاه الزهراء (س) mohseni.m89@gmail.com

1. Generalized autoregressive conditional heteroskedasicity
2. Conditional GARCH Capola

۱. مقدمه

تغییرات قیمت سهام یکی از مهم‌ترین ریسک‌های مطرح برای بنگاه‌ها و افرادی است که در سطح بازار سهام فعالیت دارند. یکی از سنجه‌های مطرح اندازه‌گیری ریسک، تخمین ارزش در معرض خطر[1] (VaR) است که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از مؤسسات مالی معتبر قرار گرفته است. ارزش در معرض خطر، حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دوره معینی در آینده، با ضریب اطمینان مشخصی، از آن بیش‌تر نمی‌شود. محاسبه ارزش در معرض خطر سبد متشکل از چند دارایی نسبت به محاسبه ارزش در معرض خطر یک دارایی به مراتب دشوارتر است. چرا که در محاسبهٔ VaR سبد دارایی تعیین تابع توزیع مشترک و روابط بین دارایی‌ها اهمیت پیدا می‌کند. در اکثر روش‌های متداول برآورد ارزش در معرض خطر، توزیع مشترک شناخته شده‌ای برای سبد دارایی فرض می‌شود و به طور معمول توزیع مشترک نرمال در مدل‌های تجربی و نظری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مطالعات انجام‌شده بر روی تغییرات بازده دارایی‌های مالی، نشان می‌دهند که توزیع بازده دارایی‌ها دنباله پهن[2] هستند. همچنین، نقطه اوج توزیع بازده در مقایسه با آنچه توزیع نرمال پیش‌بینی می‌کند مرتفع‌تر و باریک‌تر است. فرض نرمال بودن تابع توزیع مشترک سبد دارایی به دلیل در نظر گرفتن روابط خطی بین دارایی‌ها نیز مورد تردید است.

لانجین و سالنیک[3] (۲۰۰۱) شواهدی را یافتند که نشان می‌داد، بازدهی دارایی‌ها در جریان رکود اقتصادی و بازارهای پرتلاطم به صورت شدیدتری همبسته‌اند. واضح است وابستگی قوی‌تری بین زیان‌های بزرگ وجود دارد تا بین سودهای بزرگ. چنین عدم‌تقارنی با توزیع‌های متقارن غیرقابل مدل‌سازی می‌باشد.

امبرشتس و همکاران[4] (۲۰۰۲) نشان دادند استفاده از همبستگی خطی برای مدل‌سازی ساختار وابستگی اشکالات فراوانی دارد. بنابراین فرض نرمال بودن توزیع مشترک بازدهی‌ها می‌تواند منجر به برآورد نامناسب VaR شود. تئوری کاپولا ابزار اساسی مدل‌سازی توزیع‌های چندمتغیره است که در آن با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای و وابستگی بین متغیرها تابع توزیع مشترک تعریف می‌شود (هوتا[5] و پالارو[1]، ۲۰۰۶). رویکرد کاپولا، روشی برای توصیف ساختارهای وابستگی

1. Value at Risk
2. Fat tail
3. Longin and Solnik
4. Embrechts and ethal
5. Hotta

است. این روش نقوص ممکن رویکردهای دیگر در تعیین ساختار وابستگی که در آنها تنها بر همبستگی دارایی‌ها تکیه شده‌است را ندارد (مک‌نیل، فری و امبرشتس[2]، ۲۰۰۵). استفاده از تئوری کاپولا در مدل‌سازی توزیع‌های مشترک، فصل تازه‌ای در مباحث ارزش در معرض خطر ایجاد کرده است که لازم دیده شد مطالعه‌ای کاربردی برای شرکت‌های داخلی به انجام رسد.

در این مقاله ارزش در معرض خطر یک روزه با کمک چهار روش شبیه‌سازی تاریخی، واریانس- کوواریانس ساده، مدل کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و مدل کاپولای گوسی با حاشیه‌های دارای توزیع تی در دو سطح اطمینان ۹۹ و ۹۵ درصد محاسبه خواهد شد. در آخر صحت پیش‌بینی هر یک از مدل‌ها پس از ۱۰۰ بار شبیه‌سازی خارج از نمونه، با استفاده از آزمون کوپیک، ارزیابی خواهد شد.

در این راستا ساختار مقاله در ادامه به شرح زیر خواهد بود. در بخش دوم مروی بر ادبیات تجربی خواهد شد. در این بخش ابتدا ارزش در معرض خطر و روش‌های محاسبه آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس به تبیین روش کاپولا پرداخته می‌شود. در بخش سوم ادبیات تجربی بررسی می‌شود. در بخش چهارم الگوی کاپولای شرطی برای برآورد ارزش در معرض خطر تصریح و برآورد می‌شود. در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادات سیاستی آورده می‌شود.

۲. ادبیات نظری

۲-۱. ارزش در معرض خطر

ارزش در معرض خطر، حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دوره معینی در آینده، با ضریب اطمینان مشخصی، از آن بیش‌تر نمی‌شود و به این سؤال پاسخ می‌دهد که با x درصد احتمال و طی افق زمانی تعیین شده، حداکثر چه میزان از ارزش دارایی یا سبد دارایی‌ها در معرض ریسک قرار دارد. ارزش در معرض خطر در دوره t به شرط اطلاعات دوره‌های قبلی Ω_{t-1}، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(\prod_t - \prod_{t-1} \le -VaR_t(\alpha,k) | \Omega_{t-1}) = P(r_{Pt} \le -VaR_t(\alpha,k) | \Omega_{t-1}) = \alpha \qquad (1)$$

---

1. Palaro
2. Embrechts

در این رابطه، Π_t لگاریتم ارزش سبد دارایی در دورهٔ t، r_{pt} بازدهی سبد سهام در زمان t، α سطح اطمینان و k دورهٔ زمانی است که ارزش در معرض خطر برای آن محاسبه می‌گردد (رادپور و عبده، ۱۳۸۱).

روش‌های متعددی برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر ارائه شده است که آن‌ها را می‌توان در سه گروه کلی روش‌های پارامتریک، روش‌های ناپارامتریک (شبیه‌سازی تاریخی) و روش شبیه‌سازی مونت کارلو دسته‌بندی کرد. در محاسبه ارزش در معرض خطر به روش پارامتریک، تعیین تابع توزیع بازده دارایی (سبد دارایی) و سپس پیش‌بینی نوسانات بازده دارایی (سبد دارایی)، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مدل‌ها، فرض می‌شود که بازده دارایی‌ها دارای توزیع‌های پارامتریک[1] هستند. یکی از انواع مدل‌های پارامتریک، مدل‌های واریانس- کوواریانس می‌باشد. در این رویکرد فرض می‌شود بازدهی لگاریتمی[2] قیمت‌ها به طور نرمال توزیع شده است. سبدی متشکل از n سهم را در نظر بگیرید.

$$R_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \ln\left(1-\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) \sim \frac{\Delta p_t}{p_{t-1}} \tag{2}$$

در اینجا p_{t-1} و p_t قیمت سهام در زمان t و $t-1$ است و ΔP تغییرات قیمت در طول این دو دوره است. رویکرد واریانس- کوواریانس با فرض توزیع مشترک نرمال و وجود روابط خطی بین دارایی‌ها VaR را به‌صورت زیر شناسایی می‌کند:

$$\begin{aligned} VaR^* &= -\left(F^{-1}(\alpha)\sqrt{V'\Omega V} + \mu_p\right) \\ VaR &= -F^{-1}(\alpha)\sigma_p = F^{-1}(1-\alpha)\sigma_p \end{aligned} \tag{3}$$

در رابطه فوق V بردار وزن‌ها، V' ترانهاده آن و Ω ماتریس واریانس- کوواریانس دارایی‌ها است. σ_p انحراف معیار سبد سهام و μ_p میانگین سبد سهام سبد می‌باشد. $F^{-1}(\alpha)$ صدک αام تابع توزیع است که در این مدل، تابع توزیع نرمال فرض شده است. ارزش در معرض خطر به دست آمده از روش فوق، اصطلاحاً ارزش در معرض خطر از میانگین نامیده می‌شود. VaR^* را اصطلاحاً ارزش در معرض خطر از صفر یا ارزش در معرض خطر مطلق می‌نامند (رحیمیان، ۱۳۹۰).

یکی دیگر از روش‌های محاسبه ارزش در معرض خطر روش شبیه‌سازی تاریخی[3] است. در روش‌های پارامتریک فرض می‌شود بازده دارایی‌ها، دارای توزیع‌های پارامتریک هستند. این

1. parametric distribution
2. logaritmic return
3. Historical Simulation Method

روش‌ها در معرض ریسک مدل[۱] قرار دارند. اما روش شبیه‌سازی تاریخی که یک روش ناپارامتریک است، این فرض را تحمیل نمی‌کند. در عوض، این روش چنین فرض می‌کند که توزیع تغییرات احتمالی عوامل بازار برای دوره بعدی مشابه توزیع مشاهده شده در N دوره گذشته است. در این روش، مستقیماً از داده‌های شبیه‌سازی تاریخی برای برآورد ریسک استفاده می‌شود و هیچ تعدیلی روی این داده‌ها صورت نمی‌گیرد. برای برآورد ارزش در معرض ریسک کافی است که صدک آلفای توزیع بازده استخراج شود. برای این کار سری بازده را از کوچک به بزرگ مرتب شده و جایگاه صدک مورد نظر مشخص می‌شود (رادپور و عبده، ۱۳۸۱).

روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو[۲] برخلاف روش شبیه‌سازی تاریخی از اطلاعات تاریخی استفاده نمی‌کند بلکه در این روش با استفاده از فرآیندهای تصادفی و استفاده از نمونه‌های شبیه‌سازی شده زیاد که توسط رایانه ساخته می‌شود، پیش‌بینی تغییرات آتی به انجام می‌رسد. در تخمین VaR، هر شبیه‌سازی، ارزش احتمالی سبد دارایی را در پایان دوره نگهداری در اختیار قرار می‌دهد. در صورت داشتن تعداد کافی از این شبیه‌سازی‌ها، توزیع شبیه‌سازی شده ارزش‌های سبد دارایی به توزیع صحیح ولی ناشناخته سبد نزدیک خواهد شد و می‌توان از این توزیع برای استنباط VaR و یا سایر سنجه‌های ریسک استفاده کرد (همان).

۲-۲. تبیین الگوی کاپولا

یک کاپولای d- بعدی یک تابع توزیع روی فضای $[0,1]^d$ با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد است. برای کاپولاها از نمادگذاری $C(u)=C(u_1,\dots,u_d)$ استفاده می‌شود. کاپولا یک نگاشت از یک ابرمکعب به یک بازه واحد است که سه ویژگی زیر همیشه برقرار است.

۱. $C(u_1,\dots,u_d)$ نسبت به هر مؤلفه u_i افزایشی است.

۲. به ازای هر $i\in\{1,\dots,d\}$ و $u_i\in[0,1]$، $C(1,\dots,1,u_i,1,\dots,1)=u_i$

۳. به ازای هر $(a_1,\dots,a_d),(b_1,\dots,b_d)\in[0,1]^d$ که $a_i\le b_i$، داریم:

$$\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+\cdots+i_d}\,C(u_{1i_1},\dots,u_{di_d})\ge 0 \qquad (۴)$$

1. model risk
2. Monte Carlo Simulation Method

کـه در آن بـه ازای هـر $j \in \{1,\dots,d\}$ ، $u_{j1} = a_j , u_{j2} = b_j$ (مـک‌نیـل، فـری و امبرشـتس، ۲۰۰۵).

تئوری‌های جدید در مورد کاپولا، حدوداً به چهل سال قبل باز می‌گردد کـه اسـکلار[1] (۱۹۵۹) بعضی ویژگی‌های مهم کاپولا را تعریف و فراهم نمود. مهم‌ترین مسئله کـاپولا در قضـیهٔ اسـکلار مطرح می‌شود که رابطه بین تابع توزیع مشترک و کاپولا را بیان می‌کند.

فرض کنید F یک تابع توزیع مشـترک بـا توزیـع‌هـای حاشـیه‌ای $F_1,\dots,F_d$ باشـد. آن‌گـاه کاپولای $C:[0,1]^d \to [0,1]$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x_1,\dots,x_d$ در $\overline{R} = [-\infty,\infty]$ رابطه زیر برقرار است:

$$F(x_1,\dots,x_d) = C\big(F_1(x_1),\dots,F_d(x_d)\big) \qquad (5)$$

اگر حاشیه‌ای‌ها پیوسته باشند آن‌گاه کاپولا یکتا خواهد بود، در غیر این صورت کاپولای به دسـت آمده یکتا نیست. از تعمیم قضیه اسکلار بـرای توابع توزیـع شـرطی، کـاپولای شـرطی بـه دسـت می‌آید. با در نظرگرفتن فرآیند سری‌های زمانی $\{x_{1t}, x_{2t},\dots,x_{nt}\}_{t=1}^{T}$، قضیه اسکلار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_t(x_{1t},\dots,x_{dt} \mid \Omega_{t-1}) = C_t\left(F_{1t}(x_{1t} \mid \Omega_{t-1}),\dots,F_{dt}(x_{dt} \mid \Omega_{t-1})\right) \qquad (6)$$

که در آن Ω_{t-1} مجموعه اطلاعات تا زمان $t-1$ می‌باشد (چروبینـی، لوسـیانو و وچیتـو[2]، ۲۰۰۴). قضیه اسکلار نشان می‌دهد، زمانی که متغیرها پیوسته‌اند هر تابع توزیع احتمال چندمتغیره مـی‌توانـد با استفاده از یک توزیع حاشیه‌ای و یک ساختار وابسته نشان داده شود که به صـورت زیـر اسـتنتاج می‌شود:

$$F(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n C\big(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)\big)}{\partial F_1(x_1)\dots\partial F_n(x_n)} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \qquad (7)$$
$$f(x_1,\dots,x_n) = c(u_1,\dots,u_n) \times \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

که در آن f_i ها توابع چگالی حاشیه‌ای، $u_i = F_i(x_i)$ها تابع توزیـع حاشـیه‌ای و c تـابع چگـالی کاپولا است (مک‌نیل، لیدسکاگ[3] و امبرشتس، ۲۰۰۱).

1. Sklar
2. Cherubini, Luciano& Vecchiato
3. Lindskog

۲-۳. کاپولای گوسی

کاپولای گوسی[1]، کاپولای توزیع نرمال چندمتغیره می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^n\left(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n)\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)}\cdots\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}X^T R^{-1} X\right) dx_1 \ldots dx_n \qquad (8)$$

که در آن Φ_R تابع توزیع مشترک توزیع نرمال استاندارد n- بعدی با ماتریس همبستگی خطی R است و Φ^{-1} معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد تک‌متغیره می‌باشد. با توجه به این‌که توابع چگالی حاشیه‌ای، نرمال استاندارد در نظرگرفته می‌شود، چگالی کاپولای گوسی به صورت زیر استنتاج می‌شود:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}X^T R^{-1} X\right)$$
$$= C_R^{Ga}\left(\Phi(u_1),\ldots,\Phi(u_n)\right) \times \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)\right)$$

$$C_R^{Ga}\left(u_1,\ldots,u_n\right) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta^T (R^{-1}-1)\delta\right)$$

که در آن $\delta = \left(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n)\right)^T$ است (چروبینی، لوسیانو و وچیتو، ۲۰۰۴).

به همان روشی که کاپولای گوسی از توزیع نرمال چندمتغیره استنتاج شد، می‌توان کاپولای تی- استیودنت را از توزیع تی چندمتغیره استخراج کرد (همان). کاپولای گوسی و کاپولای تی- استودنت توسط توابع توزیع چندمتغیره شناخته شده‌ای بیان می‌شوند و شکل محدود شده ساده‌ای ندارند، در حالی که برای گروهی از کاپولاها شکل محدود شده ساده‌ای تعریف شده است که از آن جمله می‌توان طبقه آرچیمدیان کاپولا[2] را نام برد. در عمل این گروه از کاپولاها کاربردی‌تر هستند، چرا که وابستگی در ابعاد زیاد را تنها با یک پارامتر مدل‌سازی می‌کنند. آرچیمدیان کاپولا به‌صورت کلی زیر نشان داده می‌شوند:

$$C(u_1,\ldots,u_n) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1)+\cdots+\psi^{-1}(u_n)\right)$$

1. Gaussian copula
2. Archimedean copulas

ψ تابع مولد[1] است (همان). از این طبقه کاپولا می‌توان به کلایتون کاپولا[2] اشاره کرد که تابع مولد کلایتون کاپولا به‌صورت $\psi(u) = u^{-a} - ۱$ تعریف می‌شود. بنابراین تابع معکوس مولد آن $\psi^{-۱}(t) = (t+۱)^{-\frac{۱}{\alpha}}$ خواهد بود. کلایتون کاپولا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$C(u_۱,\ldots,u_n) = \left[\sum_{i=۱}^{n} u_i^{-\alpha} - n + ۱\right]^{-\frac{۱}{\alpha}} \qquad \alpha > ۰$$

۳. ادبیات تجربی

هانگ[3] و همکاران (۲۰۰۹) ارزش در معرض خطر سبد متشکل از دو شاخص *TALEX* و *NAZDAQ* را با کمک روش گارچ کاپولای شرطی و روش‌های پارامتریک و شبیه‌سازی تاریخی محاسبه کردند. نتایج نشان داد مدل کاپولا در مقایسه با روش‌های رایج به‌صورت موفق-تری عمل می‌کند. همچنین تی کاپولا ساختار وابستگی بازدهی سبد دارایی را به‌خوبی توصیف می‌کند.

هوتا و پالارو (۲۰۰۶) با کمک توابع کاپولای متفاوت و مدل گارچ در برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای، ارزش در معرض خطر را برای شاخص‌های سهام *S&P500* و *Nasdaq* محاسبه کردند و نتایج به دست آمده از این مدل را با مدل‌های شبیه‌سازی تاریخی، میانگین متحرک وزنی نمائی و گارچ مقایسه نموده‌اند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که تابع کاپولای جو- کلایتون متقارن[4] *(SJC)* به‌همراه توزیع‌های حاشیه‌ای گارچ، نتایج بهتری در مقایسه با سایر مدل‌ها ارائه می‌کند.

محمدی، راعی و فیض‌آباد (۱۳۸۷) عملکرد روش پارامتریک در پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر در مورد دو سبد متشکل از شرکت‌های بورس اوراق بهادار تهران (سبد متشکل از تمامی شرکت‌ها و سبد متشکل از ۵۰ شرکت با نقدشوندگی بالا) را مورد بررسی قرار دادند. برای این منظور، پس از محاسبهٔ *VaR* با استفاده از برخی مدل‌های خانواده آرچ[5] بر روی سه توزیع نرمال، تی- استیودنت و توزیع خطای تعمیم‌یافته، نتایج بدست آمده با استفاده از آزمون پس‌نگر[6]

1. generator
2. Clayton copula
3. Huang
4. symmetrized Joe-Clayton copula
5. Autoregressive Conditional Heteroskedasicity (ARCH)
6. back-testing

مقایسه شد. نتایج بدست آمده نشان داد که پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر با استفاده از توزیع‌های لپتوکورتیک از دقت و عملکرد بالاتری برخوردارند.

خیابانی و ساروقی (۱۳۹۰) با استفاده از مدل‌های خانواده آرچ ارزش در معرض خطر را برای داده‌های شاخص روزانه بورس اوراق بهادار تهران برآورد کردند. آن‌ها از آزمون‌های پوشش شرطی و پوشش غیرشرطی برای مقایسه دقت پیش‌بینی الگوهای انتخابی استفاده کردند. نتایج نشان داد، الگوی آرچ با توزیع تی-استیودنت از توانمندی مناسب‌تری در مقایسه با الگوهای خانواده دیگر مانند تی گارچ[1] و ای گارچ[2] برخوردار است.

کشاورز حداد و صمدی (۱۳۸۸) در تحقیق خود ابتدا با استفاده از روش‌های گارچ، تلاطم موجود شاخص‌های قیمت بورس تهران را برآورد کردند و بهترین مدل‌ها در تخمین و پیش‌بینی تلاطم را بدست آوردند. آن‌ها برای تبیین میانگین شرطی، از مدل آرفیما[3] و برای واریانس شرطی، در کنار مدل‌های با حافظهٔ کوتاه‌مدت، از مدل با حافظهٔ بلندمدت فی گارچ[4] استفاده کردند و سپس ارزش در معرض خطر را با در نظر گرفتن توزیع نرمال و تی-استیودنت برآورد کردند. مقایسه مدل‌ها نشان داد که در سطوح اطمینان متفاوت برای تخمین VaR، مدل‌های مختلف، نتایج متفاوتی می‌دهند، ولی می‌توان گفت مدل فی گارچ در سطح معنی‌داری ۲/۵٪ بهترین عملکرد را در میان مدل‌های گارچ نشان داد.

اکثر مطالعات صورت گرفته در ایران، ارزش در معرض خطر را با استفاده از روش‌های پارامتریک برآورد کرده‌اند و تمرکز اصلی در مدل‌سازی نوسانات دارایی‌ها و پیش‌بینی واریانس شرطی توزیع‌ها بوده است. اغلب روش‌های مورد استفاده در برآورد VaR فرض می‌کنند که توزیع مشترک بازدهی دارایی‌ها شناخته شده است و بطور معمول نرمال بودن توزیع مشترک بازدهی‌ها را مورد استفاده قرار می‌دهند. در حقیقت توزیع بازدهی دارایی‌های مالی دنباله‌هایی پهن‌تر از توزیع نرمال دارند. از طرفی استفاده از همبستگی خطی برای مدل‌سازی ساختار وابستگی اشکالات فراوانی را ایجاد می‌کند. وجه تمایز این مقاله با سایر مطالعات صورت گرفته این است که در مقاله حاضر با تأکید به تئوری کاپولا توزیع مشترکی برای دارایی‌ها در نظر گرفته می‌شود که فارغ از هرگونه فرض نرمال‌بودن و همبستگی خطی است.

1. Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasicity (TGARCH)
2. Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasicity (EGARCH)
3. Autoregressive Fractional Integrated Moving Average (ARFIMA)
4. Fractional Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasicity (FIGARCH)

٤. تصریح و برآورد مدل

در این بخش از مقاله اقدام به تصریح الگوی کاپولا برای برآورد ارزش در معرض خطر برای یک سبد دارایی می‌شود. در صورتی که سبد دارایی متشکل از n دارایی با بازدهی $\left(\{r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{nt}\}_{t=1}^{T}\right)$ باشد و وزن هر سهم با w_i مشخص شود، ارزش در معرض خطر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\left(w_1 r_{1t} + w_2 r_{2t} + \cdots + w_n r_{nt} \leq -VaR_t(\alpha, k) \mid \Omega_{t-1}\right) = \alpha$$
$$P\left(r_{1t} \leq \left(-VaR_t w_1 - (w_2 r_{2t} + \cdots + w_n r_{nt}) / w_1\right) \mid \Omega_{t-1}\right) = \alpha$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{-VaR_t w_1 - (w_2 r_{2t} + \cdots + w_n r_{nt})/w_1} f(r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{nt} \mid \Omega_{t-1}) dr_{1t} \ldots dr_{nt} = \alpha$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{-VaR_t w_1 - (w_2 r_{2t} + \cdots + w_n r_{nt})/w_1} c(u_1, \ldots, u_n \mid \Omega_{t-1}) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} f_i(r_{it} \mid \Omega_{t-1}) dr_{1t} \ldots dr_{nt} = \alpha$$

با داشتن پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای f_i برای هر سهم و پارامترهای تابع چگالی شرطی کاپولا، ارزش در معرض خطر از رابطه بالا استخراج می‌شود. در ادامه به چگونگی مدل‌سازی توزیع‌های حاشیه‌ای و برآورد پارامترهای تابع کاپولای گوسی (ماتریس همبستگی R) پرداخته می‌شود.

٤-۱. مدل‌سازی توزیع‌های حاشیه‌ای

هرچند سری‌های زمانی مالی مانند بازدهی سهام و نرخ‌های ارز غیرقابل پیش‌بینی هستند ولی خوشه‌بندی آشکاری در تلاطم آن‌ها وجود دارد که از آن به عنوان ناهمسانی واریانس یاد می‌شود. مدل‌های گارچ در تحلیل داده‌های سری زمانی به‌ویژه کاربردهای مالی که هدف تحلیل و پیش‌بینی تلاطم می‌باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مدل حاشیه‌ای انتخاب شده در این مطالعه مدل گارچ کلاسیک می‌باشد که در آن جزء اخلال‌ها از توزیع نرمال و تی-استیودنت تبعیت می‌کنند. در این مدل‌ها، فرض می‌شود که بازده و واریانس شرطی از فرآیند زیر پیروی کند:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad v_t \sim n(0,1) \quad or \quad v_t \sim t(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{h=1}^{p} \gamma_h \sigma_{t-h}^2$$

که μ_t، میانگین شرطی بازدهی، مشروط به اطلاعات موجود تا دورهٔ ($E[r_t \mid \Omega_{t-1}] = t-1, \varepsilon_t, \mu_t$)، شوک بازدهی در دورهٔ t است. $\text{var}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1}) = \sigma_t^2$ نیز واریانس شرطی بازدهی می‌باشد. در این رابطه، γ_hها را ضرایب GARCH می‌نامند. همچنین، $\alpha_0 > 0$ و $\alpha_k \geq 0$ برای $k \geq 1$ و $\beta_h \geq 0$ برای $h \geq 1$ (بلرسلف[1]، ۱۹۸۶). بدین ترتیب توزیع حاشیه‌ای برای هر سهم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(r_t \leq r \mid \Omega_{t-1}) = P(\varepsilon_t \leq (r-\mu_t) \mid \Omega_{t-1})$$
$$= P\left(v_t \leq \frac{(r-\mu_t)}{\sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{h=1}^{p} \gamma_h \sigma_{t-h}^2}} \middle| \Omega_{t-1} \right)$$
$$\begin{cases} N\left(\frac{(r-\mu_t)}{\sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{h=1}^{p} \gamma_h \sigma_{t-h}^2}} \middle| \Omega_{t-1} \right), & if \quad v_t \sim N(0,1) \\ t_d\left(\frac{(r-\mu_t)}{\sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{h=1}^{p} \gamma_h \sigma_{t-h}^2}} \middle| \Omega_{t-1} \right), & if \quad v_t \sim t_d \end{cases}$$

۴-۲. روش برآورد

برای برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای و تابع کاپولای گوسی از روش حداکثر راستنمائی[2] استفاده می‌شود که در ابعاد زیاد بسیار پیچیده می‌باشد؛ چرا که پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابستگی ارائه شده توسط کاپولا را هم‌زمان برآورد می‌کند. به همین دلیل جو[3] و همکاران (۱۹۹۶) پیشنهاد کردند که مجموعه پارامترها در دو مرحله برآورد شود:

1. Bollerslev
2. Maximum likelihood estimation
3. Joe

در اولین مرحله پارامترهای حاشیه‌ها از طریق تخمین توزیع‌های حاشیه‌ای تک‌متغیره برآورد می‌شوند:

$$\hat{\theta}_1 = ArgMax\theta_1 \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \ln f_j(x_{jt};\theta_1)$$

در مرحله دوم با توجه به $\hat{\theta}_1$ معلوم، پارامتر کاپولا θ_2 برآورد می‌شود:

$$\hat{\theta}_2 = ArgMax\theta_2 \sum_{t=1}^{T} \ln c\left(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}); \theta_2, \hat{\theta}_1\right)$$

روش برآورد ارائه شده، استنتاج حاشیه‌ها (IFM) نامیده می‌شود. برآوردگر IFM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)'$$

تابع لگاریتم درست‌نمائی برای چگالی کاپولای گوسی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$l(\theta) = -\frac{T}{2}\ln|R| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \delta_t'(R^{-1} - 1)\delta_t$$

به‌طوری که θ شامل تمام پارامترهای R و $\delta_t = \left(\Phi^{-1}(u_{1t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{nt})\right)'$ می‌باشد. برآوردگر حداکثر درست‌نمائی R به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{R}_{MLE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \delta_t'\delta_t$$

تمامی مدل‌های حاشیه‌ای، هم با فرض توزیع نرمال و هم با فرض توزیع t، برآورد می‌شوند. با فرض این که شوک‌ها دارای توزیع نرمال‌اند، تابع درست‌نمایی عبارت خواهد بود از:

$$L = \sum_{t=\varsigma}^{T}\left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right)$$

ς برابر تعداد مشاهداتی است ك در فرآیند برآورد از دست می‌رود. تابع حداکثر درست‌نمایی برای توزیع t به شکل زیر است:

$$L = -\sum_{t=\varsigma}^{T}\left(\frac{\tau+1}{2}\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(\tau-2)\sigma_t^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2)\right)$$

τ، درجات آزادی توزیع است که از پیش تعیین شده و مقدار آن معمولاً بین ۳ تا ۶ در نظر گرفته می‌شود.[1] برای برآورد همزمان τ، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$l = L + (T - \varsigma)\left(\ln\left(\Gamma\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right) - \ln\left(\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left((\tau-2)\pi\right)\right)$$

که در این رابطه، Γ، تابع گاماست ($\Gamma(\theta) = \int_0^{\infty} y^{\theta-1} e^{-y} dy$).

٤-٣. معرفی داده‌ها

جامعه آماری، شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد. داده‌های مورد بررسی، قیمت‌های روزانه سبد دارایی یک شرکت سرمایه‌گذاری منتخب متشکل از ۱۷ سهم است. بازه زمانی مورد بررسی از تاریخ ۱۳۸۶/۷/۳ تا ۱۳۹۰/۱۲/۲۴ می‌باشد. در روزهایی که برخی سهم‌ها معامله نشده و مشاهده‌ای برایشان موجود نیست، با استفاده از روش درون‌یابی، قیمتی برای آن‌ها منظور شده‌است. در نهایت ۱۰۸۱ بازده لگاریتمی از هر سهم موجود می‌باشد که در جدول (۱) ویژگی‌های آماری آن‌ها آورده شده‌است.

آماره آزمون جارک- برا در موارد پارس خودرو، رینگ‌سازی مشهد و گروه بهمن پذیرفته می‌شود که این بیانگر نرمال بودن توزیع بازدهی آن‌ها می‌باشد. در سایر موارد آماره آزمون جارکو- برا که از تلفیق شاخص‌های کشیدگی و چولگی به‌دست می‌آید در هر سطح احتمالی رد می‌شود. آماره آزمون دیکی- فولر تنها برای سهم ایران تراسفو در سطح معنی‌داری ۵٪ پذیرفته می‌شود و نشان‌دهنده نامانایی بازدهی قیمت ایران ترانسفو است. در بقیه موارد فرضیه صفر وجود ریشه واحد در سطح ۱ و ۵ درصد رد می‌شود. برای هر یک از بازدهی‌ها، بهترین معادله میانگین براساس معیار شوارتز، تصریح شده‌است. آماره Q برای آزمون باکس- یونگ نشان می‌دهد که در ۱۰ مورد فرضیه صفر عدم وجود خودهمبستگی در سری پسماندها در سطح معنی‌داری ۵٪ پذیرفته می‌شود. در این موارد آماره Q^2 نشان می‌دهد با وجود نوفه سفید[2] بودن جزء پسماند و عدم وجود همبستگی بین آن‌ها، روابط غیرخطی به صورت سیستماتیک بین مقادیر جزء پسماند برقرار است. در تمامی بازدهی‌ها مقدار آماره آزمون Q^2، خودهمبستگی شدید در سری مجذور پسماندها را نشان می‌دهد. این نتیجه امکان استفاده از الگوهای خانواده گارچ را برای پیش‌بینی واریانس شرطی

1.Tsay R. S. (2005)
2.White – Noise

جملات خطا امکان‌پذیر می‌سازد. انتخاب تعداد وقفه در آزمون باکس- یونگ، می‌تواند عملکرد آن را تحت تأثیر قرار دهد. مطالعات شبیه‌سازی پیشنهاد می‌کنند که $m \approx \ln(T)$ نتایج مناسبی را ارائه می‌کند (تسی[1]، ۲۰۰۵). در اینجا آماره Q و Q^2 با توجه به تعداد مشاهدات در وقفه ۷ گزارش شده است.

جدول ۱. توصیف آماری بازده‌های روزانه هر سهم طی دوره ۱۳۸٦/۷/۳ تا ۱۳۹۰/۱۲/۲٤

سهام	میانگین	انحراف میانگین	شاخص چولگی	شاخص کشیدگی	سطح معنی‌داری آمارهٔ آزمون جارکو- برا[2]	سطح معنی‌داری آماره Q برای آزمون باکس- یونگ[3]	سطح معنی‌داری آماره Q^2 برای آزمون مکلود- لی[4]	سطح معنی‌داری آماره آزمون دیکی فولر
آبسال	۰/۰۹۱	۱/۶۲۱	۰/۲۶۲	۵/۵۵۹	۰	۰/۴۵۳۰	۰	۰
البرزدارو	۰/۰۹۱	۱/۸۰۲	۰/۱۵۴	۶/۷۱۲	۰	۰/۶۷۲۰	۰	۰
ایران ترانسفو	۰/۰۲۷	۲/۳۳۴	۱/۰۹۶	۱۶/۲۲	۰	۰/۸۱۲۰	۰	۰/۰۹۵۲
ایران خودرو	۰	۰/۰۱۸	۰/۴۴۱	۳/۱۸۱	۰	۰/۰۰۲۰	۰	۰
بانک پارسیان	۰/۲۰۰	۱/۹۷۰	۰/۳۴۵	۳۲/۵۵	۰	۰/۳۰۶۰	۰	۰
بانک کارآفرین	۰/۰۴۹	۱/۵۱۶	۰/۱۶۱	۴/۵۰۲	۰	۰/۳۴۶۰	۰	۰
پارس خودرو	۰/۰۰۱	۰/۰۱۷	۰/۰۷۵	۲/۸۲۹	۰/۳۱۲۵	۰/۴۰۷۰	۰	۰
پارس دارو	-۰/۰۰۱	۰/۰۲۶	-۲/۴۶۵	۱۵/۳۲	۰	۰/۰۳۸۰	۰	۰
پاکسان	۰/۰۰۱	۰/۰۱۵	-۰/۱۱۴	۳/۵۶۰	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۵۰	۰	۰
چادرملو	۰/۰۳۵	۱/۶۵۹	۰/۲۲۵	۲/۸۰۰	۰/۰۰۴۱	۰/۴۱۰۰	۰	۰
رینگ‌سازی مشهد	۰/۰۶۷	۱/۷۰۵	۰/۱۱۷	۲/۷۹۳	۰/۱۱۰۵	۰/۲۶۵۰	۰	۰
زامیاد	۰/۳۶۷	۲/۰۱۷	-۰/۱۹۸	۲/۱۱	۰	۰/۰۴۳۰	۰	۰
سر.رنا	۰	۰/۰۱۶	۰/۳۲۷	۴/۹۵۳	۰	۰/۰۹۷۰	۰	۰
کالسیمین	-۰/۱۳۸	۲/۱۹۸	۰/۰۷۴	۷/۱۲۴	۰	۰/۰۲۳۰	۰	۰
گروه بهمن	۰/۰۳۸	۱/۷۵۰	۰/۱۳۸	۳/۰۹۶	۰/۱۴۳۱	۰/۰۴۹۰	۰	۰
ملی صنایع مس	-۰/۲۳۴	۹/۶۸۸	-۰/۵۳۷	۳۸۳/۱	۰	۰	۰	۰
مهرکام پارس	-۰/۰۳۹	۱/۸۹۸	۰/۳۵۷	۵/۰۶۹	۰	۰/۰۶۱۰	۰	۰

منبع: محاسبات محقق

1. Tsay
2. Jarque-Bera Test
3. Box-Ljung
4. McLeod-Li Test

٤-٤. نتایج برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای

در روش *گارچ* کاپولای شرطی ابتدا بهترین معادله میانگین براساس معیار شوارتز، برای هر یک از بازدهی‌ها تصریح شده و در نهایت با توجه به وجود ناهمسانی واریانس در سری‌ها، مدل گارچ مناسبی براساس معیار شوارتز برآورد می‌شود. نتایج حاصل از برآورد مدل GARCH(p,q) با کمک روش حداکثر درستنمائی و با فرض تبعیت شوک‌ها از توزیع نرمال و توزیع تی-استیودنت در جداول (۲ الی ۱۸) ارائه شده است. آماره آزمون Q لیونگ-باکس برای پسماندهای معادله میانگین در تمام وقفه‌ها، در سطح معنی‌داری ۵ درصد پذیرفته می‌شود که حاکی از مطلوب بودن نتایج برآورد است. همچنین آزمون $Q^{۲}$ برای مربع پسماندهای معادله میانگین، نشان‌دهنده رفع اثر ARCH در تمامی وقفه‌ها می‌باشد. در برآورد بهترین مدل‌های گارچ، پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای هر سهم به‌دست می‌آید.

جدول ۲. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم آبسال

آبسال	معادله میانگین			معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_۱$	$a_۰$	$a_۱$	$b_۱$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\alpha_۲$	$\gamma_۱$	$\gamma_۲$	AIC	BIC	Log L	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	۰/۰۲۶	۰/۸۲۴	-۰/۶۰	۰/۰۰۱	۰/۴۹۶	-۰/۴۸	۱/۴۳۸	-۰/۴۵۱	۳/۳۸۷	-۳/۴۲۴	-۱۸۲۱	۵/۹۶۳	۵/۰۰۱
سطح معنی داری	۰/۶۲۰	۰	۰	۰/۰۰۶	۰	۰	۰	۰				۰/۳۱۰	۰/۴۱۶

$$r_{۱,t} = a_۰ + a_۱ r_{۱,t-۱} + \varepsilon_t - b_۱ \varepsilon_{t-۱}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_۰ + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^{۲} + \alpha_۲ \varepsilon_{t-۲}^{۲} + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^{۲} + \gamma_۲ \sigma_{t-۲}^{۲}$$

آبسال	معادله میانگین		معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_۱$	$a_۰$	$b_۲$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\alpha_۲$	$\gamma_۱$	$\gamma_۲$	AIC	BIC	Log L	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	۰	۰/۲۳۳	۰/۰۰۳	۵/۱۵۴	۱/۹۱۲	-۰/۱۳	۰/۱۵۵	۲/۹۹۷	۳/۰۳۴	-۱۶۱۲	۱/۲۳۱	۰/۱۷۱

سطح معنی داری	۰/۹۴۴	۰	۰/۰۳۴	۰/۰۳۳	۰/۰۴۰	۰/۰۰۲	۰			۰/۹۷۵	۱

$$r_{1,t} = a_0 + \varepsilon_t - b_2\varepsilon_{t-2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2 + \gamma_2\sigma_{t-2}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۳. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم البرزدارو

البرزدارو	معادله میانگین			معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_2	a_0	a_1	b_1	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۲۸	۰/۵۸۴	۰/۴۳-	۰/۷۶۳	۰/۲۹۳	۰/۴۹۲	۳/۷۸۹	۳/۹۱۷	۲۰۹۴-	۳/۹۴۶	۱/۱۹۱
سطح معنی داری	۰/۶۳۱	۰	۰/۰۰۲	۰	۰	۰				۰/۵۵۷	۰/۷۶۱

$$r_{2,t} = a_0 + a_1 r_{2,t-1} + \varepsilon_t - b_2\varepsilon_{t-1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2$$

البرزدارو	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_2	a_0	b_1	b_2	b_3	b_4	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۰۷	۰/۲۶۵	۰/۱۷۵	۰/۰۶۷	۰/۰۷۵	۰/۷۳۱	۰/۷۰۸	۰/۳۸۵	۳/۷۷۸	۳/۸۲۹	۲۰۳۸-	۷/۱۹۲	۳/۹۲۸
سطح معنی داری	۰/۹۰۶	۰	۰	۰/۰۱۵	۰/۰۰۳	۰	۰	۰				۰/۶۶	۰/۲۶۹

$$r_{2,t} = a_0 + \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1} - b_2\varepsilon_{t-2} - b_3\varepsilon_{t-3} - b_4\varepsilon_{t-4}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ٤. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم ایران ترانسفو

ایران ترانسفو	معادله میانگین			معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
dr_3	a_0	b_1	b_2	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۱۴	−۰/۴۹۲	−۰/۲۷۷	۰/۰۱۰	۰/۰۶۵	−۰/۰۶۶	۱/۶۶۹	−۰/۶۷۱	۴/۱۵۸	۴/۱۹۵	−۲۲۳۷	۳/۶۱۳	۰/۳۹۸
سطح معنی‌داری	۰/۳۲۱	۰	۰	۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰	۰				۰/۶۰۶	۰/۹۹۵

$$dr_{3,t} = a_0 + \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1} - b_2\varepsilon_{t-2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2 + \gamma_2\sigma_{t-2}^2$$

ایران ترانسفو	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
dr_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰	−۰/۳۷	−۰/۳۸	−۰/۲۴	−۰/۱۴	۰	۰/۵۴۸	۰/۸۳۰	۱/۳۶۹	۱/۴۱۱	−۷۲۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶
سطح معنی‌داری	۰/۹۹۹	۰	۰	۰	۰	۰/۰۳۶	۰	۰				۱	۱

$$dr_{3,t} = a_0 + a_1 dr_{3,t-1} + a_2 dr_{3,t-2} + a_3 dr_{3,t-3} + a_4 dr_{3,t-4} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ٥. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم ایران خودرو

ایران خودرو	معادله میانگین							معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_4	a_0	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	α_0	α_1	α_2	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)

ضرایب	-۰/۰۱۶	۲/۴۸۷	-۲/۰۵۱	۰/۵۶۲	-۲/۱۱۹	۱/۴۲۶	-۰/۲۹۳	۰	۰/۴۳۸	-۰/۳۵۴	۰/۹۲۷	-۶/۲۵۲	-۶/۲۰۱	۱۷۸۳	۱/۶۲۰	۱/۶۷۹
سطح معنی‌داری	۰/۰۱۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۲۰۳	۰/۱۹۴

$$r_{۴,t} = a_۰ + a_۱ r_{۴,t-۱} + a_۲ r_{۴,t-۲} + a_۳ r_{۴,t-۳} + \varepsilon_t - b_۱ \varepsilon_{t-۱} - b_۲ \varepsilon_{t-۲} - b_۳ \varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^۲ + \alpha_۲ \varepsilon_{t-۲}^۲ + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^۲$$

ایران خودرو	معادله میانگین			معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_۴$	$a_۰$	$a_۲$	$b_۲$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\gamma_۱$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	۰/۰۷۷	۰/۹۹۹	-۰/۵۷	۰	۰/۴۶۷	۰/۳۴۸	-۶/۷۶۰	-۶/۷۲۷	۳۷۰۸	۰/۳۳۸	۰/۰۳
سطح معنی‌داری	۰/۶۵۶	۰	۰	۰/۰۲۷	۰	۰				۰/۹۹	۱

$$r_{۴,t} = a_۰ + a_۲ r_{۴,t-۲} + \varepsilon_t - b_۲ \varepsilon_{t-۲}$$

$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^۲ + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^۲$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ٦. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم بانک پارسیان

بانک پارسیان	معادله میانگین						معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_۵$	$a_۰$	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$b_۲$	$b_۳$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\gamma_۱$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	۰/۱۶۸	۰/۳۸۱	۰/۲۸۳	۰/۱۵۴	-۰/۳۶۲	-۰/۲۷۵	۰/۴۶۴	۰/۲۵۴	۰/۵۸۲	۳/۶۹۴	۳/۷۳	-۱۹۸۲	۴/۲۹	۴/۴۴

سطح معنی‌داری	۰/۰۲۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۱۱	۰/۱۰

$$r_{۵,t} = a_{۰} + a_{۱} r_{۵,t-۱} + a_{۲} r_{۵,t-۲} + a_{۳} r_{۵,t-۳} + \varepsilon_t - b_{۲}\varepsilon_{t-۲} - b_{۳}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

بانک پارسیان	معادله میانگین						معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_{۵}$	$a_{۰}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$b_{۲}$	$b_{۳}$	$\alpha_{۰}$	$\alpha_{۱}$	$\gamma_{۱}$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	۰/۴۰۷	۰/۴۳۱	۰/۳۳۷	۰/۱۷۲	-۰/۳۳۸	-۰/۲۶۷	۰/۳۵۹	۰/۵۶۷	۰/۵۱۴	۳/۶۱۹	۳/۶۶۵	-۱۹۴۰	۴/۴۱	۴/۳۵
سطح معنی‌داری	۰/۰۸۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۱۱	۰/۱۱

$$r_{۵,t} = a_{۰} + a_{۱} r_{۵,t-۱} + a_{۲} r_{۵,t-۲} + a_{۳} r_{۵,t-۳} + \varepsilon_t - b_{۲}\varepsilon_{t-۲} - b_{۳}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۷. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم بانک کارآفرین

بانک کارآفرین	معادله میانگین		معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_{۶}$	$a_{۰}$	$b_{۱}$	$\alpha_{۰}$	$\alpha_{۱}$	$\gamma_{۱}$	$\gamma_{۲}$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	۰/۰۵۵	۰/۲۸۲	۰/۲۳۸	۰/۲۲۱	۱/۰۲۲	-۰/۳۳	۳/۵۱۰	۳/۵۳۸	-۱۸۹۱	۵/۸۰	۶/۲۲
سطح معنی‌داری	۰/۱۸۸	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۵۳	۰/۳۹

$$r_{۶,t} = a_{۰} + \varepsilon_t - b_{۱}\varepsilon_{t-۱}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۲}\sigma_{t-۲}^{۲}$$

بانک کارآفرین	معادله میانگین		معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_6	a_0	b_1	α_0	α_1	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۱۷	۰/۲۶۴	۰/۱۷۰	۰/۲۷۲	۱/۰۲۰	−۰/۳۲۲	۳/۴۷۱	۳/۵۰۳	−۱۸۶۹	۴/۷۸۲	۷/۹۳
سطح معنی‌داری	۰/۶۷۱	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۵۶	۰/۲۴
$r_{6,t} = a_0 + \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1}$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2 + \gamma_2\sigma_{t-2}^2$											

منبع: محاسبات محقق

جدول ۸. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم پارس خودرو

پارس خودرو	معادله میانگین				معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_7	a_0	a_1	b_1	b_2	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۰۲	۰/۹۷۱	−۰/۵۳۶	−۰/۳۰۴	۰	۰/۴۳۲	−۰/۳۹۵	۱/۴۶۶	−۰/۴۹۶	−۵/۹۴۱	−۵/۸۹۹	۳۲۱۷/۳	۳/۶۷	۳/۷۹
سطح معنی‌داری	۰/۰۱۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۴۵۱	۰/۴۳۵
$r_{7,t} = a_0 + a_1 r_{7,t-1} + \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1} - b_2\varepsilon_{t-2}$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2 + \gamma_2\sigma_{t-2}^2$														

پارس خودرو	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_7	a_0	a_1	a_3	b_1	b_3	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)

ضرایب	۰/۰۳۴	۰/۶۳۴	۰/۳۶۵	-۰/۱۲۹	-۰/۲۴۶	۰	۰/۸۴۸۵	۰/۴۹۴۸	-۶/۸۸۹	-۶/۸۴۸	۳۷۲۲	۰/۰۰۱	۰/۰۲۴
سطح معنی‌داری	۰/۹۵۱	۰	۰	۰/۰۲۹	۰	۰/۰۴۷	۰	۰				۱	۰/۹۹

$$r_{۷,t} = a_{۰} + a_{۱}r_{۷,t-۱} + a_{۳}r_{۷,t-۳} + \varepsilon_t - b_{۱}\varepsilon_{t-۱} - b_{۲}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۹. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم پارس دارو

پارس دارو	معادله میانگین				معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_۸$	$a_۰$	$a_۲$	$b_۱$	$b_۲$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\alpha_۲$	$\gamma_۱$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	۰/۰۰۱	۰/۶۹۴	۰/۲۵۶	-۰/۴۲	۰	۰/۶۴۸	-۰/۵۰	۰/۸۴۷	-۵/۲۶	-۵/۲۲	۲۸۴۶	۳/۰۹	۱/۹۷
سطح معنی‌داری	۰/۲۶۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۵۴	۰/۷۴

$$r_{۸,t} = a_{۰} + a_{۳}r_{۸,t-۲} + \varepsilon_t - b_{۱}\varepsilon_{t-۱} - b_{۲}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{۰} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \alpha_{۲}\varepsilon_{t-۲}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

پارس دارو	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_۸$	$a_۰$	$a_۱$	$a_۲$	$b_۲$	$\alpha_۰$	$\alpha_۱$	$\gamma_۱$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	-۰/۰۳۷	۰/۵۴۰	۰/۴۵۹	-۰/۰۹۶	۰	۷/۳۶۸	۰/۱۳۰	-۶/۴۷۷	-۶/۴۳۹	۳۵۰۲	۰/۰۲	۰/۰۱

سطح معنی‌داری	۰/۴۷۶	۰	۰	۰	۰/۰۴۲	۰/۰۰۲	۰				ـ	ـ

$$r_{8,t} = a_0 + a_1 r_{8,t-1} + a_2 r_{8,t-2} + \varepsilon_t - b_2 \varepsilon_{t-3}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۰. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم پاکستان

پاکستان	معادله میانگین			معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_9	a_0	a_1	a_2	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۰۱	۰/۲۴	۰/۲۲	۰	۰/۳۳	−۰/۳۱	۱/۴۲	−۰/۴۴	−۵/۷۸	−۵/۷۸	۳۱۴۸	۷/۲۱	۴/۱۷
سطح معنی‌داری	۰/۰۰۳	۰	۰	۰/۰۰۱	۰	۰	۰	۰				۰/۱۴	۰/۵۲

$$r_{9,t} = a_0 + a_1 r_{9,t-1} + a_1 r_{9,t-1} + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2$$

پاکستان	معادله میانگین				معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_9	a_0	a_2	a_3	b_1	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۰۴	۰/۷۲۷	۰/۲۶۹	۰/۵۵۷۸	۰	۱/۳۱۵	−۰/۹۷۴	۱/۱۵۷	−۰/۳۰۷	−۶/۲۱۹	−۶/۱۷۳	۳۳۶۲	۰/۶۱۷	۰/۱۳۱
سطح معنی‌داری	۰/۷۸۳	۰	۰	۰	۰/۰۰۶	۰	۰	۰	۰				۰/۹۶	۰/۹۹

$$r_{9,t} = a_0 + a_2 r_{9,t-2} + a_3 r_{9,t-3} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۱. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم چادرملو

چادرملو	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{10}	a_0	a_1	a_2	b_2	b_3	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۲۲	۰/۳۳۳	۰/۶۳۱	-۰/۶۱۷	-۰/۰۱۵	۰/۰۶۹	۰/۲۲۱	۰/۷۷۸	۳/۴۹۹	۳/۵۳۶	-۱۸۷۹	۳/۵۸۷	۵/۰۶
سطح معنی‌داری	۰/۹۰۴	۰	۰	۰	۰	۰/۰۱۰	۰	۰				۰/۳۱	۰/۱۶

$$r_{10,t} = a_0 + a_1 r_{10,t-1} + a_2 r_{10,t-2} + \varepsilon_t - b_2 \varepsilon_{t-2} + b_3 \varepsilon_{t-3}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

چادرملو	معادله میانگین						معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_{10}	a_0	a_1	a_2	a_3	b_2	b_4	α_0	α_1	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	-۰/۲۰	۰/۴۶۵	۰/۷۲۴	-۰/۱۸۹	-۰/۵۷	۰/۰۹۹	۰	۵/۰۷۹	۰/۵۱۳	-۰/۰۷۰	۲/۰۰۹	۲/۰۵۹	-۱۰۷۱	۰/۰۰۵	۰/۰۲۶
سطح معنی‌داری	۰/۹۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۳۷	۰/۰۳۷	۰	۰				۰/۹۹	۰/۹۸

$$r_{10,t} = a_0 + a_1 r_{10,t-1} + a_2 r_{10,t-2} + a_3 r_{10,t-3} + \varepsilon_t - b_2 \varepsilon_{t-2} - b_4 \varepsilon_{t-4}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۲. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم رینگ سازی مشهد

رینگ‌سازی مشهد	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{11}	a_0	a_1	b_1	b_2	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	-۰/۲۲	۰/۹۷۷	-۰/۷۴۶	-۰/۰۱۵	۰/۰۷۷	۰/۲۲۳	۰/۷۷۵	۳/۷۰۵	۳/۸۳۷	-۱۹۹۴	۲/۴۱	۱/۴۳

سطح معنی‌داری	۰/۲۰۹۹	۰	۰	۰	۰/۰۰۱	۰	۰				۰/۶۶	۰/۸۴

$$r_{۱۱,t} = a_. + a_۱ r_{۱۱,t-۱} + \varepsilon_t - b_۱ \varepsilon_{t-۱} - b_۲ \varepsilon_{t-۲}$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_. + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^۲ + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^۲$$

رینگ‌سازی مشهد	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_{۱۱}$	$a_.$	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$b_۳$	$\alpha_.$	$\alpha_۱$	$\gamma_۱$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	−۱/۷۹	۰/۳۷	۰/۱۴۷	۰/۴۷۸	−۰/۱۹	۰	۱/۶۱	۰/۳۴۲	۲/۶۵	۲/۶۹	−۱۴۲۲	۰	۰/۰۳
سطح معنی داری	۰/۹۴۲	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۵	۰/۰۱۷	۰				۱	۰/۹۹

$$r_{۱۱,t} = a_. + a_۱ r_{۱۱,t-۱} + a_۲ r_{۱۱,t-۲} + a_۳ r_{۱۱,t-۳} + \varepsilon_t - b_۳ \varepsilon_{t-۳}$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_. + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^۲ + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^۲$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۳. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم زامیاد

زامیاد	معادله میانگین						معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_{۱۲}$	$a_.$	$a_۲$	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$	$b_۴$	$\alpha_.$	$\alpha_۱$	$\alpha_۲$	$\gamma_۱$	$\gamma_۲$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^۲$(۷)
ضرایب	۰/۵۹۷	۰/۹۹۸	۰/۵۷۱	−۰/۷۹۰	−۰/۴۳۷	−۰/۰۷۰	۰/۰۶۹	۰/۴۱۶	۰/۴۱۳	−۰/۲۱۰	۰/۶۱۳	۳/۵۶۱	۳/۶۱۲	−۱۹۱۰/۲	۳/۵۲۰	۱/۹۷۷
سطح معنی‌داری	۰/۶۱۴۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۱۱	۰				۰/۱۷۲	۰/۳۸۲

$$r_{۱۲,t} = a_. + a_۲ r_{۱۲,t-۲} + \varepsilon_t - b_۱ \varepsilon_{t-۱} - b_۲ \varepsilon_{t-۲} - b_۳ \varepsilon_{t-۳} - b_۴ \varepsilon_{t-۴}$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_. + \alpha_۱ \varepsilon_{t-۱}^۲ + \alpha_۲ \varepsilon_{t-۲}^۲ + \gamma_۱ \sigma_{t-۱}^۲ + \gamma_۲ \sigma_{t-۲}^۲$$

زامیاد	معادله میانگین	معادله نوسانات	مدل GARCH با فرض توزیع t

r_{12}	a_0	a_1	a_2	a_4	b_1	b_3	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	-۰/۱۱۷	۰/۳۲۶	۰/۳۳۳	۰/۳۴۱	۰/۴۷۵	۰/۱۷۷	۰	۴/۲۸۴	۰/۳۹۲	۰/۹۶۶	۱/۰۱۲	-۵۱۰/۱	۰	۰/۰۳
سطح معنی‌داری	۰/۹۹۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۶	۰	۰				۱	۰/۹۷

$$r_{12,t} = a_0 + a_1 r_{12,t-1} + a_2 r_{12,t-2} + a_4 r_{12,t-4} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - b_3 \varepsilon_{t-3}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۴. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم سرمایه‌گذاری رنا

سرمایه‌گذاری رنا	معادله میانگین			معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{13}	a_0	a_1	b_1	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰	۰/۷۱۳	-۰/۷۵۰	۰	۰/۳۵۱	-۰/۲۷۹	۱/۲۲۹	-۰/۲۹۷	-۶/۱۲۷	-۶/۰۹۰	۳۳۱۶/۶	۷/۸۶۳	۰/۹۸۲
سطح معنی‌داری	۰/۰۴۰۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۱۹				۰/۱۶۴	۰/۹۶۴

$$r_{13,t} = a_0 + a_1 r_{13,t-1} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2$$

سرمایه‌گذاری رنا	معادله میانگین		معادله نوسانات				مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_{13}	a_0	a_1	α_0	α_1	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰	۱	۰	۲/۳۸۲	۰/۴۲۹	-۰/۰۴۹	-۸/۳۷	-۸/۳۴	۴۵۲۶	۰	۰/۰۵

سطح معنی‌داری	۰/۰۰۲	۰	۰	۰	۰	۰				۱	۱

$$r_{۱۳,t}=a_{.}+a_{۱}r_{۱۳,t-۱}+\varepsilon_{t}$$

$$\sigma_{t}^{۲}=\alpha_{.}+\alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲}+\gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}+\gamma_{۲}\sigma_{t-۲}^{۲}$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۵. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم کالسیمین

کالسیمین	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
$r_{۱۴}$	$a_{.}$	$a_{۱}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$b_{۳}$	$\alpha_{.}$	$\alpha_{۱}$	$\gamma_{۱}$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	-۱/۰۲۳	۰/۴۶۰	۰/۶۹۲	۰/۶۴۷	۴۳۹۵۸	۰/۰۷۱	۰/۳۰۹	۰/۷۲۶	۳/۹۲۸	۳/۹۶۵	-۲۱۰۷	۰/۶۴	۴/۳۹
سطح معنی‌داری	۰	۰	۰	۰/۷۸۵	۰/۲۲۱	۰	۰	۰				۰/۷۸۵	۰/۲۲۱

$$r_{۱۴,t}=a_{.}+a_{۱}r_{۱۴,t-۱}+a_{۳}r_{۱۴,t-۳}+a_{۴}r_{۱۴,t-۴}+\varepsilon_{t}-b_{۳}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_{t}^{۲}=\alpha_{.}+\alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲}+\gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

کالسیمین	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_{۱۴}$	$a_{.}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$b_{۲}$	$\alpha_{.}$	$\alpha_{۱}$	$\gamma_{۱}$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	-۰/۷۷	۰/۷۱۶	۰/۷۱۳	-۱/۰۱۴	۰	۱۴/۳۴	۰/۱۵۲	۲/۷۶۲	۲/۷۹۹	-۱۵۳۴	۰/۰۴۳	۰/۰۷
سطح معنی‌داری	۰/۱۴۷	۰	۰	۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۴	۰				۱	۰/۹۹

$$r_{۱۴,t}=a_{.}+a_{۲}r_{۱۴,t-۲}+a_{۳}r_{۱۴,t-۳}+\varepsilon_{t}-b_{۲}\varepsilon_{t-۲}$$

$$\sigma_{t}^{۲}=\alpha_{.}+\alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲}+\gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۶. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم گروه بهمن

گروه بهمن	معادله میانگین				معادله نوسانات					مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{15}	a_0	a_1	a_3	a_4	α_0	α_1	α_2	γ_1	γ_2	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	-۰/۰۱	۰/۳۱۳	-۰/۰۳	۰/۱۱	۰/۰۶	۰/۳۷	۰/۳۸	-۰/۲۹	۰/۶۸۷	۳/۰۵	۳/۰۹	-۱۶۳۳	۴/۲۵	۱/۶۹
سطح معنی داری	۰/۷۸۵	۰	۰/۰۴۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۳۷	۰/۷۹

$$r_{15,t} = a_0 + a_1 r_{15,t-1} + a_3 r_{15,t-3} + a_4 r_{15,t-4} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2$$

گروه بهمن	معادله میانگین					معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_{15}	a_0	a_1	a_3	b_2	b_3	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰	۰/۴۹۴	۰/۳۱۹	۰/۱۳۵	-۰/۱۳۷	۰	۹/۰۱۰	۰/۲۲۹	-۱/۴۰۷	-۱/۳۶۶	۶۷/۶۷	۰/۰۱	۰/۰۱
سطح معنی داری	۰/۹۹۹	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰				-	-

$$r_{15,t} = a_0 + a_1 r_{15,t-1} + a_3 r_{15,t-3} + \varepsilon_t - b_2 \varepsilon_{t-2} - b_3 \varepsilon_{t-3}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۷. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم صنایع مس ملی

صنایع مس ملی	معادله میانگین						معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{16}	a_0	a_2	a_3	a_4	b_1	b_3	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)

ضرایب	-۰/۱۸۵	۰/۰۹۷	۰/۷۰۴	-۰/۱۱۵	۰/۲۱۷	-۰/۷۰۱	۰/۹۶۰	۱/۰۷۵	۰/۲۷۹	۴/۷۳۳	۴/۷۷۵	-۲۵۳۹	۲/۳۹۲	۰/۱۱۹
سطح معنی‌داری	۰/۰۴۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۳۰۲	۰/۹۳۲

$$r_{16,t} = a_0 + a_2 r_{16,t-2} + a_3 r_{16,t-3} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - b_3 \varepsilon_{t-3}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

صنایع مس ملی	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
r_{16}	a_0	a_1	b_1	b_2	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	-۰/۰۷۷	۰/۹۰۷	-۰/۵۷۶	-۰/۱۴۳	۱/۶۶۹	۰/۶۰۷	۰/۱۶۷	۳/۹۹۰	۴/۰۲۷	-۲۱۴۶	۰/۵۴	۰/۰۱
سطح معنی‌داری	۰/۴۸۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۳				۰/۹۷	۱

$$r_{16,t} = a_0 + a_1 r_{16,t-1} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - b_2 \varepsilon_{t-2}$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

منبع: محاسبات محقق

جدول ۱۸. نتایج برآورد مدل GARCH برای بازدهی سهم مهرکام پارس

مهرکام پارس	معادله میانگین			معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع نرمال				
r_{17}	a_0	a_1	b_1	α_0	α_1	γ_1	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	Q^2(۷)
ضرایب	۰/۰۶۵	۰/۷۹۰	-۰/۷۸۶	۰/۰۴۴	۰/۳۰۹	۰/۷۵۰	۳/۷۰۷	۳/۷۳۴	-۱۹۹۵	۵/۷۳۱	۵/۱۲۴

سطح معنی‌داری	۰/۲۵۳	۰	۰	۰	۰	۰				۰/۳۳۳	۰/۴۰۱

$$r_{۱۷,t} = a_{.} + a_{۱} r_{۱۷,t-۱} + \varepsilon_t - b_{۱}\varepsilon_{t-۱}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{.} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

مهرکام پارس	معادله میانگین				معادله نوسانات			مدل GARCH با فرض توزیع t				
$r_{۱۷}$	a.	$a_{۳}$	$b_{۲}$	$b_{۳}$	α.	$\alpha_{۱}$	$\gamma_{۱}$	AIC	BIC	LogL	Q(۷)	$Q^{۲}$(۷)
ضرایب	۰/۱۴۴	۰/۷۷۹	۰/۱۶۱	-۰/۵۱	۰	۱/۸۳۹	۰/۵۱۷	۲/۵۲۳	۲/۵۶۰	-۱۳۵۱	۰/۰۳	۰/۰۱
سطح معنی‌داری	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۳	۰	۰				-	-

$$r_{۱۷,t} = a_{.} + a_{۳} r_{۱۷,t-۳} + \varepsilon_t - b_{۲}\varepsilon_{t-۲} - b_{۳}\varepsilon_{t-۳}$$

$$\sigma_t^{۲} = \alpha_{.} + \alpha_{۱}\varepsilon_{t-۱}^{۲} + \gamma_{۱}\sigma_{t-۱}^{۲}$$

منبع: محاسبات محقق

در مرحلهٔ بعد، پارامترهای کاپولای گوسی (ماتریس ضریب همبستگی) با استفاده از پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال که در مرحله قبل برآورد شده‌اند، با کمک روش حداکثر درستنمائی برآورد می‌شوند. بار دیگر ماتریس همبستگی کاپولای گوسی با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای تی- استیودنت به‌دست می‌آید. در نهایت VaR برای بازدهی سبد سهام با استفاده از مدل گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و توزیع تی استیودنت محاسبه می‌شود. نتایج پیش‌بینی ارزش در معرض خطر برای یک روز با استفاده از این دو مدل و مدل‌های واریانس- کواریانس و شبیه‌سازی تاریخی در جدول (۱۹) گزارش شده‌است.

جدول ۱۹. نتایج پیش‌بینی ارزش در معرض خطر یک روزه سبد سهام در سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد

۹۵٪	VaR
گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال	۱/۸۲۳۹
گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای تی استیودنت	۱/۶۸۵۹
واریانس- کوواریانس	۴/۲۸۵۶
شبیه‌سازی تاریخی	۳/۰۰۲۹
۹۹٪	**VaR**
گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال	۲/۴۱۷۱
گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای تی استیودنت	۲/۲۲۲۰
واریانس- کوواریانس	۵/۸۹۹۷
شبیه‌سازی تاریخی	۴/۷۰۹۸

منبع: محاسبات محقق

در تفسیر مقادیر پیش‌بینی شده VaR می‌توان گفت که؛ روش گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال پیش‌بینی می‌کند در سطح اطمینان ۹۵٪، حدود ۱/۸۲ درصد از ارزش سبد دارایی مورد بررسی در معرض خطر است. یعنی حداکثر زیانی که با احتمال ۹۵ درصد در یک روز ممکن است سرمایه‌گذار متحمل شود ۱/۸۲ درصد از ارزش سبد دارایی است. نتایج بدست آمده از گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و تی استیودنت تقریباً با هم برابر است. روش شبیه‌سازی تاریخی و واریانس- کوواریانس VaR را بیشتر از دو روش دیگر برآورد کرده‌اند.

٤-۳. ارزیابی صحت برآورد مدل‌ها و نتایج آزمون کوپیک[1]

یکی از روش‌های متداول ارزیابی صحت پیش‌بینی‌های VaR، آزمون پوشش غیرشرطی است. فرض صفر در این آزمون که توسط کوپیک (۱۹۹۵) ارائه گردید، بیان می‌کند که احتمال عدم موفقیت در عمل (π)، برابر با سطح احتمال در نظر گرفته شده در مدل (α) می‌باشد. آماره آزمون نسبت راستنمائی به صورت زیر است:

$$LR_{PF} = 2\ln\left[\frac{\hat{\pi}^{T_1}(1-\hat{\pi})^{T-T_1}}{\alpha^{T_1}(1-\alpha)^{T-T_1}}\right] \sim \chi^2(1)$$

1. Kupiec test

که در آن، $\hat{\pi}=\frac{T_1}{T}$ برآوردگر حداکثر راستنمایی π و T_1 بیانگر تعداد خطا می‌باشد. T تعداد کل مشاهدات را نشان می‌دهد (محمدی، راعی و فیض‌آباد، ۱۳۸۷).

در آزمون کوپیک ابتدا سری‌های به‌دست آمده از برآورد VaR، با بازده واقعی در بازه زمانی مورد مطالعه مقایسه می‌شود. سپس فرضیه صفر مبنی بر برابری احتمال عدم موفقیت محاسبه شده و سطح معنی‌داری مورد نظر در صورتی مورد قبول قرار می‌گیرد که نسبت احتمال شکست بزرگتر از توزیع کای دو با یک درجه آزادی باشد. با توجه با این که در فرآیند مدل‌سازی گارچ تعدادی از مشاهدات از دست می‌رود، در نهایت ۱۰۷۷ مشاهده از پسماندها خواهیم داشت.

برای انجام آزمون کوپیک، داده‌ها به دو گروه داخل نمونه با ۹۷۷ مشاهده و خارج نمونه با ۱۰۰ مشاهده تقسیم شده است. برای آزمون هر مدل، ارزش در معرض خطر بازدهی سبد سهام در سطح اطمینان مشخص α (۹۹ و ۹۵ درصد) به تعداد ۱۰۰ بار و با استفاده از قانون دورانی[1] پیش‌بینی می‌شود. به این ترتیب که داده‌های سبد سهام را به طول ۹۷۷ در نظر گرفته و ابتدا $VaR_{۹۷۸}(\alpha)$ برای داده‌های $\{r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{nt}\}_{t=1}^{977}$ محاسبه می‌شود؛ سپس با استفاده از داده‌های $\{r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{nt}\}_{t=2}^{978}$ دومین پیش‌بینی یعنی $VaR_{۹۷۹}(\alpha)$ صورت می‌گیرد و به همین ترتیب آخرین پیش‌بینی براساس داده‌های $\{r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{nt}\}_{t=100}^{1076}$ محاسبه می‌شود. در نهایت ۱۰۰ مقدار برای ارزش در معرض خطر سبد دارایی خواهیم داشت که با کمک آزمون کوپیک صحت آن بررسی می‌شود. نتایج آزمون مدل‌های بررسی شده در جدول (۲۰) برای دو سطح اطمینان ۹۹ و ۹۵ درصد قابل مشاهده است.

جدول ۲۰. مقایسه ارزش در معرض خطر محاسبه شده برای ۱۰۰ روز خارج نمونه با استفاده از آزمون کوپیک

نتیجه آزمون	مقدار بحرانی	آماره LR کوپیک	تعداد خطا	مدل	α
قبول	۳/۸۴۱۵	۰	۵	GARCH-n – کاپولاگوسی	۰/۰۵
قبول	۳/۸۴۱۵	۰	۵	GARCH-t–کاپولاگوسی	
رد	۳/۸۴۱۵	۱۰/۲۵۸۷	۰	شبیه‌سازی تاریخی	
رد	۳/۸۴۱۵	۱۰/۲۵۸۷	۰	واریانس–کواریانس	

1. Rolling

۰/۰۱	GARCH-n- کاپولاگوسی	۰	۲/۰۱۰۱	۶/۶۳۴۹	قبول
	GARCH-t-کاپولاگوسی	۰	۲/۰۱۰۱	۶/۶۳۴۹	قبول
	شبیه‌سازی تاریخی	۰	۲/۰۱۰۱	۶/۶۳۴۹	قبول
	واریانس-کواریانس	۰	۲/۰۱۰۱	۶/۶۳۴۹	قبول

منبع: محاسبات محقق

همان‌طور که نتایج نشان می‌دهند، در سطح معنی‌داری ۵٪ و ۱٪ آماره LR کوپیک در هر دو روش گارچ کاپولای گوسی با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و تی استیودنت کم‌تر از مقادیر بحرانی توزیع کای‌دو با یک درجه آزادی است. بنابراین فرضیه صفر برابری نرخ شکست و سطح معنی‌داری پذیرفته می‌شود که نشان‌دهنده برآورد مناسب مدل ارائه شده است. در سطح معنی‌داری ۵٪ و ۱٪ تعداد خطاهای برآورد شده از روش‌های شبیه‌سازی تاریخی و واریانس- کوواریانس صفر است. این موضوع نشان می‌دهد، این مدل‌ها ریسک را بیش از واقعیت برآورد کرده‌اند و در طول ۱۰۰ پیش‌بینی انجام شده، مقادیر VaR بسیار بیشتر از بازدهی‌های موجود می‌باشد. بنابراین نتایج مدل‌های شبیه‌سازی تاریخی و واریانس- کوواریانس در سطح معنی‌داری ۵٪ قابل قبول نیست.

۵. جمع‌بندی

در این مطالعه ارزش در معرض خطر یک سبد سهام نمونه برای یک روز با استفاده از روش‌های GARCH-n-کاپولاگوسی و GARCH-t-کاپولاگوسی و شبیه‌سازی تاریخی و واریانس-کوواریانس در دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد محاسبه شد. نتایج نشان می‌دهد روش‌های واریانس- کوواریانس و شبیه‌سازی تاریخی مقادیر VaR پیش‌بینی شده را بیش از دو روش دیگر برآورد کرده‌اند. همچنین طبق نتایج آزمون کوپیک تعداد خطاهای این دو مدل صفر برآورد شد که این نتیجه در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل قبول نیست و نشان‌دهنده برآورد بیش از واقعیت ریسک می‌باشد. صحت روش‌های GARCH-n-کاپولاگوسی و GARCH-t-کاپولاگوسی در هر دو سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد مورد تأیید قرار گرفت. طبق نتایج آزمون کوپیک اعتماد به مقادیر پیش‌بینی شده VaR از روش‌های GARCH-n-کاپولاگوسی و GARCH-t-کاپولاگوسی قابل قبول‌تر است.

منابع

الف- فارسی

خیابانی، ناصر و مریم ساروقی (۱۳۹۰)، «ارزش‌گذاری برآورد VaR براساس مدل‌های خانواده ARCH»، *پژوهشهای اقتصادی ایران*، شماره ۴۷، ص ۷۳-۵۳.

رادپور، میثم و حسین عبده تبریزی (۱۳۸۱)، *اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار؛ رویکرد ارزش در معرض ریسک*، انتشارات آگاه، پیشبرد، تهران.

رحیمیان، راحله (۱۳۹۰)، محاسبه ارزش در معرض خطر به روش پارامتریک و ناپارامتریک برای یک بانک نمونه.

کشاورزحداد، غلامرضا و باقر صمدی (۱۳۸۸)، «برآورد و پیش‌بینی تلاطم در بازار سهام تهران و مقایسه دقت روش‌ها در تخمین ارزش در معرض خطر: کاربردی از مدل‌های خانواده FIGARCH»، *تحقیقات اقتصادی*، شماره ۸۶، ص ۲۳۵-۱۹۳.

محمدی، شاپور، راعی، رضا و آرش فیض‌آباد (۱۳۸۷)، «محاسبه ارزش در معرض خطر پارامتریک با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی در بورس اوراق بهادار تهران»، *تحقیقات مالی*، دوره ۱۰، شماره ۲۵، ص ۱۲۴-۱۰۹.

ب- انگلیسی

Bollerslev, T. (1986), “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

Embrechts, P., McNeil, A. & D. Straumann (2002), Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In: Dempster, M. (Ed.), Risk Management Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, pp. 176_223.

Longin, F. & B. Solnik (2001), “Extreme correlation of international equity markets”, *Journal of Finance*, 56, 649_676.

McNeil, A. J. , Frey, R. and P. Embrechts (2005), *Quantative Risk Management: concepts, techniques and tools*, Princeton University Press, Princeton.

Palaro, H. & L. K. Hotta (2006), “Using conditional copulas to estimate value at risk”, *Journal of Data Science*, 4 (1), 93_115.

Paul Embrechts, Filip Lindskog, and Alexander McNeil (2001), *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Department of Mathematics, ETHZ CH-8092 Z¨urich Switzerland

Tsay, R. S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, second ed. New Jersy: John Wiley & Sons

Umberto Cherubini, Elisa Luciano & Walter Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd

Vandenhende, F. & P. Lambert (2003), "Improved rank-based dependence measures for categorical data", *Statistics and Probability Letters*, 63, 157_163.