فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران/ سال هجدهم/ شماره ۵۵/ تابستان ۱۳۹۲/ صفحات ۱۵۸-۱۴۱

متوسط زمان انتظار برای مشاهده روند صعودی در قیمت سکه با استفاده از دنباله تبادل‌پذیر جزیی

غلامعلی پرهام[۱]
بهاره عزیزی[۲]

تاریخ ارسال: ۱۳۹۱/۱۲/۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۲/۳

چکیده

در این مقاله روند قیمت ماهانه سکه تمام بهار آزادی برای یک دوره ۲۷ ساله با استفاده از دنباله‌های تبادل‌پذیر جزیی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. این داده‌ها براساس افزایش یا کاهش قیمت نسبت به ماه قبل، دنباله‌هایی از گردش‌های موفقیت و شکست را تولید می‌کنند. هدف به‌دست آوردن روند صعودی یا نزولی قیمت سکه تمام بهار آزادی با استفاده از این گردش‌ها است. ابتدا تبادل‌پذیری جزیی داده‌ها را بررسی و مرتبه وابستگی آنها را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تعیین می‌کنیم. سپس امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش با طول‌های متفاوت را تعیین می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که داده‌ها، تبادل‌پذیر جزیی از مرتبه یک هستند و متوسط زمان برای مشاهده حداکثر شش ماه روند صعودی قیمت سکه، قابل پیش‌بینی است.

واژگان کلیدی: گردش‌ها، تبادل‌پذیری، زنجیر مارکف، تبادل‌پذیری جزئی
طبقه‌بندی JEL: C10، C12، C13، C41.

۱. دانشیارگروه آمار دانشگاه شهید چمران اهواز Parham_g@scu.ac.ir
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد گروه آمار دانشگاه شهید چمران اهواز

۱. مقدمه

یکی از مدل‌های تصادفی مورد استفاده در علم آمار دنباله‌هایی با نتایج دودویی[1] می‌باشد. اگر در چنین دنباله‌هایی هر یک از دو پیشامد برای یک یا چندین بار پشت سر هم رخ دهد و به پیشامد دیگر ختم شود، یک گردش[2] آماری تولید می‌شود. گردش‌ها به علت کاربرد وسیعشان در رشته‌های مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند. بالاکریشنان و کوتراس[3] گردش‌ها و کاربردهایشان را مورد بررسی قرار دادند. فو و لو[4] توزیع گردش‌ها را در آزمایش‌های وابسته که وابستگی آن‌ها از نوع زنجیر مارکف است را با استفاده از روش زنجیر مارکف نشانیده[5] به‌دست آوردند. مکری و همکاران[6] طول بلندترین و کوتاهترین گردش‌های موفقیت در دنباله‌های دوتایی را به‌دست آوردند. اریلماز[7] میانگین طول‌های گردش موفقیت در یک دنباله از آزمایش‌های دودویی را بررسی کرد. در مطالعه گردش‌ها معمولاً به منظور سادگی محاسبات متغیرهای تصادفی را مستقل و هم‌توزیع در نظر می‌گیرند. اگر این فرض بین متغیرها برقرار نباشد، ساختار مدل احتمال پیچیده می‌شود و به ابزارهای دیگری نیاز پیدا می‌کنیم. تبادل‌پذیری[8] و تبادل‌پذیری جزئی[9] مفاهیمی مهم در احتمال هستند که با فرض عدم استقلال، ابزاری برای ساده نمودن محاسبات در مدل احتمال فراهم می‌کنند. این مفاهیم را دفینیتی[10] معرفی کرده است. دیاکونیس و فریدمن[11] دنباله‌های تبادل‌پذیر متناهی را مورد بررسی قرار دادند. در زمینه توزیع گردش‌ها، اریلماز[12] بلندترین آماره گردش متغیرهای دودویی تبادل‌پذیر را در فرایندهای مربوط به آب‌شناسی برای احتمال وقوع سیل یا خشکسالی، به‌دست آورد. اریلماز و دمیر[13] گردش‌های موفقیت در دنباله‌ای از آزمایش‌های دودویی تبادل‌پذیر را مورد بررسی قرار دادند. اریلماز[14] توزیع گردش‌ها، به ویژه مجموع تعداد گردش‌ها و طول بلندترین و کوتاه‌ترین گردش را در دنباله‌ای از آزمایش‌های چندوضعی[15] تبادل‌پذیر به‌دست آورد. اریلماز و یالچین[16] توزیع آماره‌های گردش را در فرایندهای تبادل‌پذیر جزئی

1. Binary
2. Run
3. Balakrishnan N. and Koutras M.V. (2002)
4. Fu J.C. and Lou W.Y.W. (2003)
5. Markov Chain Imbedding
6. Makri F.S., Philippou A. N. and Psillakis Z. M. (2007)
7. Eryilmaz S. (2009)
8. Exchangeability
9. Partially Exchangeable
10. De Finetti B., Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R. (1931) and De Finetti B. (1974)
11. Diaconis P. and Freedman D. (1980)
12. Eryilmaz S. (2005)
13. Eryilmaz S. and Demir S. (2007)
14. Eryilmaz S. (2008)
15. Multistate
16. Eryilmaz S. and Yalcin F. (2011)

به‌دست آورده‌اند. اریلماز[1] توزیع توأم آماره‌های گردش موفقیت و شکست را در فرایندهای تبادل‌پذیر جزئی به‌دست آورد.

رویکردهای موجود در تحلیل قیمت سکه عمدتاً برای پیش‌بینی قیمت سکه یا تعیین خط روند در کل دوره می‌باشد. با رسم نمودار قیمت سکه برحسب زمان به عنوان یک سری زمانی هم می‌توان تغییرات قیمت را مدل‌بندی و پیش‌بینی کرد. رویکردی که در این مقاله به کار رفته است برای پیش‌بینی متوسط زمان (ماه‌های) مشاهده دوره‌های افزایش (روند صعودی) قیمت می‌باشد. این کار با استفاده از خاصیت دنباله‌های تبادل‌پذیر جزیی صورت می‌گیرد.

ساختار مقاله از این قرار است. در بخش دوم تعریف تبادل‌پذیری و تبادل‌پذیری جزئی و رابطه آنها به هم بیان شده است. چگونگی تعیین مرتبه وابستگی در دنباله تبادل‌پذیر را در بخش سوم شرح می‌دهیم. در بخش چهارم پارامترهای توزیع آمیزنده[2] را برآورد می‌کنیم. امید ریاضی اولین زمان انتظار رسیدن به گردشی به طول k را در بخش پنجم به‌دست می‌آوریم. در بخش ششم تعیین متوسط زمان انتظار برای تعیین روند صعودی قیمت سکه تمام بهار آزادی پرداخته شده است. در بخش پایانی نتیجه کلی را بیان می‌کنیم.

۲. تبادل‌پذیری و تبادل‌پذیری جزئی

تبادل‌پذیری به عنوان یک نوع از تقارن بین متغیرهای تصادفی تعریف شده است.

تعریف: مجموعه‌ای متناهی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ از متغیرهای تصادفی را تبادل‌پذیر گویند، اگر برای هر جایگشت $\pi \in S(n)$ که $n \geq 2$ رابطه

$$P(X_{\pi(1)} \leq x_1, \ldots, X_{\pi(n)} \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \qquad (1)$$

برقرار باشد. $S(n)$ مجموعه همه جایگشت‌های $\{1,2,\ldots,n\}$ می‌باشد. به عبارت دیگر یک دنباله متناهی از متغیرهای تصادفی را تبادل‌پذیر گویند اگر اندیس متغیرها هیچ‌گونه اطلاعی درباره متغیرها دربر نداشته باشند. یک دنباله‌ی نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_i\}_{i \geq 1}$ را تبادل‌پذیر گویند، هرگاه هر دنباله متناهی از آن تبادل‌پذیر باشد.

دفینیتی[3] قضیه‌ای برای متغیرهای تصادفی دودویی تبادل‌پذیر مطرح نمود. این قضیه یک رابطه بین استقلال و تبادل‌پذیری بیان می‌کند و به دلیل ساده کردن مدل احتمالی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

قضیه: دنباله نامتناهی $\{X_i\}_{i>1}$ از متغیرهای تصادفی دودویی با مقادیر $\{0,1\}$ تبادل‌پذیر است اگر و فقط اگر اندازه احتمال یکتای μ روی $[0,1]$ وجود داشته باشد که

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \int_0^1 p^s (1-p)^{n-s} \mu(dp) \qquad (2)$$

1. Eryilmaz S. (2011)
2. Mixing Distribution
3. De Finetti B., Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R. (1931)

که در آن $s=\sum_{i=1}^{n} x_i$. به عبارت دیگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را تبادل‌پذیر گویند اگر و فقط اگر پارامتر p دارای توزیع احتمال باشد و توزیع متغیرها به شرط پارامتر مستقل باشند.

تبادل‌پذیری جزئی کلاس محدودتری نسبت به تبادل‌پذیری است. در تبادل‌پذیری، توزیع توأم دنباله‌ها تحت همه جایگشت‌ها برابرند، اما در تبادل‌پذیری جزئی، توزیع توأم دو دنباله تحت شرایطی خاص برابر هستند.[1]

تعریف: دنباله $\{X_i\}_{i>1}$ که مقادیر خود را روی $I=\{0,1\}$ می‌گیرد تبادل‌پذیر جزئی یا تبادل‌پذیر مارکفی نامیده می‌شود، اگر برای هر دو دنباله $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in I^n$ و $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in I^n$ که $n\geq 2$، با مقادیر اولیه یکسان یعنی $\tau_1=\sigma_1$ و تعداد چرخش‌های یکسان، داشته باشیم:

$$P(X_1=\sigma_1,\ldots,X_n=\sigma_n)=P(X_1=\tau_1,\ldots,X_n=\tau_n) \tag{3}$$

برای مثال، دنباله‌های $\tau=(0100101)$ و $\sigma=(0101100)$ دارای مقادیر اولیه یکسان صفر و تعداد گردش‌های یکسان ۵ می‌باشند، بنابراین براساس تعریف تبادل‌پذیری جزئی دو دنباله دارای احتمال‌های برابر هستند. یک ویژگی مهم از دنباله‌های تبادل‌پذیر جزئی بازگشتی[2] آن است که می‌توان آن‌ها را به صورت ترکیبی از زنجیرهای مارکف در نظر گرفت.[3] این ویژگی به صورت قضیه‌ای در زیر بیان شده است.

قضیه: فرض کنید $\{X_i\}_{i>1}$ یک زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال (تغییر وضعیت) مانای مجهول

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \tag{4}$$

باشد. اگر برای $i,j\in\{0,1\}$، $t_{ij}(n)$ تعداد تغییر وضعیت‌ها از وضعیت i به وضعیت j در دنباله $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشد، آن‌گاه با فرض معلوم بودن مقدار X_1 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \\ &=\int_0^1\int_0^1 p_{00}^{\,t_{00}(n)}\, p_{01}^{\,t_{01}(n)}\, p_{10}^{\,t_{10}(n)}\, p_{11}^{\,t_{11}(n)}\, \mu(dp_{00},dp_{01},dp_{10},dp_{11}) \end{aligned} \tag{5}$$

که در آن μ اندازه احتمال می‌باشد.

اثبات: دیاکونیس و فریدمن.[4]

در حالتی که زنجیر مارکف $\{X_i\}_{i>1}$ گذرا باشند، رابطه (۵) برقرار نمی‌باشد، دیاکونیس و فریدمن[5] با ارائه مثالی لزوم شرط بازگشتی را برای برقراری رابطه (۵) نشان دادند. چون در ماتریس احتمال انتقال

1. Quintana FA. and Newton MA. (1998)
2. Recurrent
3. Diaconis P. and Freedman D. (1980)
4. ibid
5. ibid

زنجیر مارکف (۴)، جمع سطرها برابر ۱ است یعنی، $p_{.1} = 1 - p_{..}$ و $p_{11} = 1 - p_{1.}$، بنـابراین رابطـه (۵) را می‌توان به صورت

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \int_0^1 \int_0^1 p_{..}^{\,t_{00}(n)} (1 - p_{..})^{t_{01}(n)}\, p_{1.}^{\,t_{10}(n)} (1 - p_{1.})^{t_{11}(n)}\, \mu(dp_{..}, dp_{1.}) \qquad (۶)$$

نوشت. اگر اندازه احتمال μ یا توزیع آمیزنده روی مجموعه $\{(p, p) : p \in [0,1]\}$ متمرکز شـده باشـد، آن‌گاه $\{X_i\}_{i>1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دودویی تبادل‌پذیر می‌باشد. اگر μ یک جرم نقطه‌ای در (p^*, p^*)، که $p^* \in (0,1)$، داشته باشد، آن‌گاه $\{X_i\}_{i>1}$ دنبالـه‌ای از متغیرهـای تصـادفی دودویـی مستقل و هم‌توزیع است. بنابراین اگر دنباله‌ای نامتناهی، بازگشتی و تبادل‌پذیر جزئی باشد، آن‌گـاه ایـن دنباله، یک زنجیر مارکف بوده و تبادل‌پذیری و استقلال به عنوان حالـت‌هـای خـاص نتیجـه مـی‌شـوند (کویینتانا و نیوتن[1]).

۳. آزمون‌های تعیین مرتبه وابستگی

در یک دنباله تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه $k \geq 1$، مجموعه تعداد انتقال‌ها را با $T_k = \{t_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}\}$ نشان می‌دهیم. که در آن برد $i_1, \ldots, i_{k+1}$، $\{0,1\}$ است. این مجموعه‌ای برای ثبت تعـداد دفعـات وقـوع همـه پیشامدهای 2^{k+1} تایی‌ها از دنباله‌های دودویی $(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})$ به طول $k+1$ در یک دنباله دودویی به طول n است. هم‌چنین براساس تعریف دنباله تبادل‌پذیر جزیی مقدار اولیه در دنباله تبادل‌پذیر جزئی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با مرتبه k را به صورت $I_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $U(X)$ آماره آزمون، برای فرضیه صفر «دنباله تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه k» و فرضـیه مقابل «دنباله تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه $k+1$» باشد. به طور کلی می‌توان دنباله تبادل‌پـذیر جزئـی بـا مرتبه k در مقابل دنباله تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه $m(m > k)$ را مورد آزمون قرار داد، اما معمولاً این آزمون به ازای $m = k + 1$ انجام می‌شود. برای آزمون تبادل‌پذیری در مقابل تبادل‌پذیری جزئی (یعنی مرتبه صفر در مقابل مرتبه یک) در یک دنباله عددی متشکل از ارقام ۰ و ۱، کویینتانا و نیـوتن[2] آمـاره آزمون را به صورت

$$U_{0,1}(X) = \left(\frac{t_{..}}{t_{.}} - \frac{t_{1.}}{t_{1.}} \right)^2 \qquad (۷)$$

در نظر گرفتند که در آن $t_{i.}$ مجموع انتقالات از $i = 0,1$ می‌باشد. آن‌ها این آماره را به صورت

$$U_{k,k+1}(X) = \sum_{i_2=0}^{1} \cdots \sum_{i_{k+1}=0}^{1} \left(\frac{t_{0 i_2 \ldots i_k i_{k+1} 0}}{t_{0 i_2 \ldots i_k i_{k+1}.}} - \frac{t_{1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} 0}}{t_{1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}.}} \right)^2 \qquad (۸)$$

1. Quintana FA. and Newton MA. (1998) and Quintana FA. And Newton MA. (1999)
2. Quintana FA. and Newton MA. (1998)

برای آزمون تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه k در مقابل تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه $k+1$ تعمیم دادند.

همانطور که در بخش ۲ بیان شد، تحت فرض تبادل‌پذیری می‌توان دنباله تبادل‌پذیر را به صورت زنجیر مارکفی نوشت. همچنین براساس تعریف دنباله تبادل‌پذیر جزیی ماتریس تغییر وضعیت تصادفی دارای سطرهای یکسانی می‌باشد. بنابراین انتظار می‌رود $t_{00}/t_{0.}$ و $t_{10}/t_{1.}$ مقادیری شبیه هم داشته باشند، در نتیجه $U_{0,1}$ باید کوچک باشد. این ایده‌ای است که منجر به ساختن این آماره شده است.

چون آماره آزمون (۸) براساس آماره‌های بسنده ساخته نشده است، ممکن است کاراترین آماره برای آزمون نباشد، بنابراین از روشی دیگر نیز برای تعیین مرتبه وابستگی داده‌ها استفاده می‌کنیم. کاتز[1] از نسبت درستنمایی در نظریه زنجیر مارکف استفاده کرد. بنابراین می‌توان از آماره نسبت درستنمایی در مدل تبادل‌پذیر جزئی نیز استفاده کرد. بیلینگزلی[2] نشان داد که نسبت درستنمایی l_{k_1,k_2} برای فرضیه صفر «زنجیر مارکف دودویی با مرتبه k_1» در مقابل فرضیه «زنجیر مارکف دودویی با مرتبه $k_2 > k_1$»، تحت فرضیه صفر، وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، l_{k_1,k_2} در احتمال به توزیع کای دو $\chi^2_{m(k_1,k_2)}$ همگرا می‌شود که در آن $m(k_1,k_2) = 2^{k_2} - 2^{k_1}$ درجه آزادی می‌باشد. بنابراین در مدل‌های تبادل‌پذیر جزئی $l_{0,1}$ به صورت

$$l_{0,1} = -2\left(\log(L_0) - \log(L_1)\right) \tag{۹}$$

است که در آن

$$L_0 = \sup_{p_1=p_2} L(p_1,p_2)\ , \quad L_1 = \sup_{(p_1,p_2)} L(p_1,p_2)\ ,$$

$$L(p_1,p_2) = p_1^{t_{00}(n)}(1-p_1)^{t_{01}(n)}\, p_2^{t_{10}(n)}(1-p_2)^{t_{11}(n)}$$

p_1 همان p_{00} و p_2 همان p_{10} رابطه (۴) می‌باشند. هم‌چنین، $l_{1,2}$ به صورت

$$l_{1,2} = -2\left(\log(L_1) - \log(L_2)\right) \tag{۱۰}$$

به دست می‌آید. که در آن،

$$L_1 = \sup_{(p_1=p_3,\, p_2=p_4)} L(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

$$L_2 = \sup_{(p_1,p_2,p_3,p_4)} L(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

$$L(p_1,p_2,p_3,p_4) = p_1^{t_{000}(n)}(1-p_1)^{t_{001}(n)}\, p_2^{t_{010}(n)}(1-p_2)^{t_{011}(n)}\, p_3^{t_{100}(n)}(1-p_3)^{t_{101}(n)}$$
$$p_4^{t_{110}(n)}(1-p_4)^{t_{111}(n)}$$

و p_1، p_2، p_3 و p_4 به ترتیب متناظر با احتمالات p_{000}، p_{010}، p_{100} و p_{110} در یک زنجیر مارکف برگشت‌پذیر ناشکننده حاصل از یک نمونه n تایی دودویی از صفر و یک می‌باشند. برای آزمون مونت کارلو، روش شبیه‌سازی به این صورت است که ابتدا B دنباله مستقلاً با ویژگی‌های دنباله موجود شبیه‌سازی و برای هر کدام از دنباله‌های شبیه‌سازی شده آماره آزمون $U(X)$ محاسبه و توزیع تجمعی تجربی آن رسم می‌شود. سپس p- مقدار آماره نمونه موجود با استفاده از این توزیع تجمعی

1. Katz R. (1981)
2. Billingsley P. (1961)

تجربی به دست می‌آید. شبیه‌سازی آزمون مونت کارلو برای نسبت درستنمایی مانند روشی است که برای آماره آزمون $U(X)$ به کار برده شده است با این تفاوت که آماره آزمون در این‌جا آماره آزمون نسبت درستنمایی است.

۴. برآورد پارامترهای توزیع آمیزنده

فرض کنید k دنباله دودویی مستقل داشته باشیم. مشاهدات دنباله iام، $i=1,2,\ldots,k$ را با $X_i=(X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{in_i})$ نشان می‌دهیم که در آن هر X_{ij} مقدار ۰ یا ۱ را می‌گیرد. کلاس مدل‌های تبادل‌پذیر جزئی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم هر دنباله دارای ماتریس احتمال انتقالی به صورت

$$P_i=\begin{pmatrix} p_{i\cdot} & 1-p_{i\cdot} \\ p_{i1} & 1-p_{i1} \end{pmatrix} \qquad i=1,\ldots,k \tag{11}$$

باشد و $P_1,\ldots,P_k$ مستقل و هم‌توزیع با ماتریس توزیع بتا هستند. در اینجا به پیروی از مارتین[1] این ماتریس توزیع بتا را با

$$M=\begin{pmatrix} a_{\cdot} & b_{\cdot} \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

نشان می‌دهیم. در حقیقت توزیع آمیزنده را بتا با پارامترهای $(a_{\cdot},b_{\cdot})$ و (a_1,b_1) در نظر گرفته‌ایم. از آن‌جا که رابطه (۶) با توزیع پسین در نظریه بیز مشابهت دارد، بنابراین توزیع پسین P_i به شرط X_i، دارای توزیع بتا با ماتریس انتقالی به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{\cdot}+t^i_{\cdot\cdot}(n_i) & b_{\cdot}+t^i_{\cdot 1}(n_i) \\ a_1+t^i_{1\cdot}(n_i) & b_1+t^i_{11}(n_i) \end{pmatrix}$$

است (کویینتانا و نیوتن[2]) که در آن $t^i_{rs}(n_i)$ تعداد انتقال‌های نمونه‌ای برای iامین دنباله آزمایشی از وضعیت r به s با $r,s\in\{0,1\}$ می‌باشند. هم‌چنین اولین مشاهده برای هر زنجیر ثابت فرض می‌شود.

برای محاسبه بعضی روابط لازم است پارامترهای توزیع بتا برآورد شوند. مشکانی و بیلارد[3] برآوردهای بیز تجربی احتمال‌های انتقال که شامل ویژگی‌های مجانبی این برآوردها است را مورد بررسی قرار دادند. یکی از روش‌های برآورد روشی است که توسط کویینتانا و نیوتن[4] معرفی شد که به طور مختصر به بیان آن می‌پردازیم.

1. Martin J. (1967)
2. Quintana FA. And Newton MA. (1999)
3. Meshkani M. R. and Billard L. (1992)
4. Quintana FA. And Newton MA. (1999)

برای برآورد ماتریس احتمال انتقال که به صورت $M=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ تعریف می‌شود باید تابع درستنمایی ماکزیمم شود. تابع درستنمایی پارامتر M، با شرطی کردن هر دنباله روی مقادیر اولیه به صورت

$$P(X_1,\ldots,X_k,P_1,\ldots,P_k,M)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{p_{i\cdot}^{t_{0\cdot}^{i}(n_i)+a_0-1}(1-p_{i\cdot})^{t_{01}^{i}(n_i)+b_0-1}}{B(a_0,b_0)}\right\}\times \tag{13}$$
$$\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{p_{i1}^{t_{1\cdot}^{i}(n_i)+a_0-1}(1-p_{i1})^{t_{11}^{i}(n_i)+b_1-1}}{B(a_1,b_1)}\right\} \qquad i=1,\ldots,k$$

می‌باشد که در آن ماتریس P_i با زوج $(p_{i\cdot},p_{i1})$ نشان داده شده است. وقتی با انتگرال‌گیری روی p_{ij} ها آنها را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$P(X_1,\ldots,X_k,M)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{B\left(t_{\cdot\cdot}^{i}(n_i)+a_0,t_{01}^{2}(n_i)+b_0\right)}{B(a_0,b_0)}\right\}\times \tag{14}$$
$$\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{B\left(t_{1\cdot}^{i}(n_i)+a_1,t_{11}^{2}(n_i)+b_1\right)}{B(a_1,b_1)}\right\}$$

اما تابع درستنمایی $P_1,\ldots,P_k$ به عنوان مشاهدات، به صورت

$$L(a_0,b_0,a_1,b_1\mid P_1,\ldots,P_k)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{p_{i\cdot}^{a_0-1}(1-p_{i\cdot})^{b_0-1}}{B(a_0,b_0)}\right\}\times\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{p_{i1}^{a_1-1}(1-p_{i1})^{b_1-1}}{B(a_1,b_1)}\right\} \tag{15}$$
$$=L(a_0,b_0\mid P_1,\ldots,P_k)\times L(a_1,b_1\mid P_1,\ldots,P_k)$$

است. کویینتانا و نیوتن[1] نشان دادند هنگامی که طول هر دنباله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و ماتریس تغییر وضعیت قابل مشاهده باشد، مشتقات لگاریتم درستنمایی رابطه (۱۴) به مشتقات لگاریتم درستنمایی رابطه (۱۵) همگرا می‌شود. بنابراین با گرفتن مشتقات جزیی از لگاریتم رابطه (۱۵) نسبت به پارامترها خواهیم داشت:

1. Quintana FA. And Newton MA. (1999)

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a_.} = \sum_{i=۱}^{k} \left\{ \ln(p_{i.}) - \Psi(a_.) + \Psi(a_. + b_.) \right\}$$
$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial b_.} = \sum_{i=۱}^{k} \left\{ \ln(۱ - p_{i.}) - \Psi(b_.) + \Psi(a_. + b_.) \right\}$$
$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a_۱} = \sum_{i=۱}^{k} \left\{ \ln(p_{i۱}) - \Psi(a_۱) + \Psi(a_۱ + b_۱) \right\} \qquad (۱۶)$$
$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial b_۱} = \sum_{i=۱}^{k} \left\{ \ln(۱ - p_{i۱}) - \Psi(a_۱) + \Psi(a_۱ + b_۱) \right\}$$

در روابط (۱۶)، Ψ تابع دوگاما[1] می‌باشد، که برابر است با $\Psi(a) = \partial \ln \Gamma(a) / \partial a$. جانسون و همکاران[2] نشان دادند که $\Psi(a) \approx \ln(a - \frac{۱}{۲})$. به دلیل خطی نبودن پارامترها در روابط (۱۶) برآوردهای درستنمایی $\hat{a}_.$ و $\hat{b}_.$ با استفاده از روش‌های عددی محاسبه می‌شوند. با استفاده از این تقریب و به خاطر همگرایی تابع درستنمایی می‌توان مقادیر اولیه $\hat{a}_.$ و $\hat{b}_.$ را به صورت

$$\hat{a}_. = \frac{۱ - \hat{G}_{p.}}{۲(۱ - \hat{G}_{p.} - \hat{G}_{(۱-p.)})} \quad , \quad \hat{a}_. > ۱$$
$$\hat{b}_. = \frac{۱ - \hat{G}_{(۱-p.)}}{۲(۱ - \hat{G}_{p.} - \hat{G}_{(۱-p.)})} \quad , \quad \hat{b}_. > ۱$$

به کار برد[3] که در آن $\hat{G}_{p.}$ و $\hat{G}_{(۱-p.)}$ برآورد میانگین هندسی $p_{i.}$ ها هستند. به طور مشابه برآوردهای $\hat{a}_۱$ و $\hat{b}_۱$ با استفاده از دو رابطه آخر (۱۶) انجام می‌گیرد. در نظریه زنجیرهای مارکف می‌توان نشان داد که وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، p_{ij} ها به وسیله $t_{ij}(n)/(t_{i.}(n) + t_{i۱}(n))$، که $t_{ij}(n)$ تعداد انتقال‌ها از i به j در یک نمونه nتایی و $i, j \in \{۰,۱\}$، برآورد می‌شوند. بنابراین از روابط (۱۶) برای برآورد پارامترها استفاده می‌کنیم. در این حالت $P_۱, \ldots, P_k$ نمونه‌هایی مستقل و هم‌توزیع با ماتریس توزیع بتا هستند که به عنوان مشاهدات محسوب می‌شوند.

۵. توزیع زمان انتظار گردش‌ها

در این بخش زمان انتظار مربوط به گردش‌ها را در یک دنباله تبادل‌پذیر جزئی بیان می‌کنیم. فرض کنید U_k زمان انتظار برای اولین گردش موفقیت به طول k در دنباله $\{X_i\}_{i>۱}$ باشد. در این صورت

1. Digamma
2. Johnson N. L., Kotz S. and Balakrishnan N. (1995)
3. ibid

زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش موفقیت به طول k، یعنی امید ریاضی U_k را می‌توان به صورت قضیه ۱ بیان کرد.

قضیه ۱: اگر U_k زمان انتظار برای اولین گردش موفقیت به طول k در یک فرایند تبادل‌پذیر جزئی بازگشتی نامتناهی $\{X_i\}_{i>1}$ باشد، در این صورت

$$E(U_k \mid X_1 = 0) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1-p_{10})^{k-1}}\left(\frac{1}{1-p_{00}} + \frac{1-(1-p_{10})^{k-1}}{p_{10}}\right)\mu(dp_{00}, dp_{10}) \qquad (۱۷)$$

$$E(U_k \mid X_1 = 1) = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-p_{00}+p_{10})(1-(1-p_{10})^{k-1})}{(1-p_{00})\,p_{10}(1-p_{10})^{k-1}}\,\mu(dp_{00}, dp_{10}) \qquad (۱۸)$$

اثبات: اریلماز و یالچین.[1]

اگر در رابطه (۱۷) توزیع آمیزنده μ، توزیع بتا با پارامترهای (a_0,b_0)، (a_1,b_1) و به صورت

$$\mu(dp_{00}, dp_{10}) = \frac{1}{B(a_0,b_0)}\,p_{00}^{\,a_0-1}(1-p_{00})^{b_0-1}\,\frac{1}{B(a_1,b_1)}\,p_{10}^{\,a_1-1}(1-p_{10})^{b_1-1}dp_{00}dp_{10} \qquad (۱۹)$$

باشد، با استفاده رابطه (۱۷)، متوسط زمان انتظار برای رسیدن به k موفقیت متوالی به شرط این‌که اولین وضعیت شکست باشد، به صورت

$$\begin{aligned} E(U_k \mid X_1 = 0) = \frac{1}{B(a_0,b_0)B(a_1,b_1)}\{&B(a_0,b_0-1)B(a_1,b_1-k+1) + \\ &B(a_0,b_0)B(a_1-1,b_1-k+1) - B(a_0,b_0)B(a_1-1,b_1)\} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

خواهد بود. که در آن $B(\cdot,\cdot)$ تابع بتا می‌باشد. هم‌چنین متوسط زمان انتظار برای رسیدن به k موفقیت متوالی به شرط این که اولین وضعیت، موفقیت باشد، با استفاده از رابطه (۱۸) به صورت

$$\begin{aligned} E(U_k \mid X_1 = 1) = &\frac{1}{B(a_0,b_0)B(a_1,b_1)}\{B(a_0,b_0-1)B(a_1,b_1-k+1) - \\ &B(a_0+1,b_0-1)B(a_1-1,b_1-k+1) + B(a_0,b_0-1)B(a_1,b_1-k+1) - \\ &B(a_0,b_0-1)B(a_1-1,b_1) + B(a_0+1,b_0-1)B(a_1-1,b_1) - B(a_0,b_0-1)B(a_1,b_1)\} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

محاسبه می‌شود.

۶. تعیین روند قیمت سکه

قیمت سکه طی چند سال اخیر روند افزایشی چشمگیری داشته است. قیمت سکه مدتی روندی صعودی را تجربه کرده و بعد از مدتی با اجرای سیاستی، قدری کاهش را نشان داده است. هر چند در دراز مدت، روند معمولاً افزایشی بوده است. در این بخش بر روی داده‌های قیمت سکه تمام بهار آزادی (طرح قدیم) که برای یک دوره ۲۷ ساله ۱۳۹۰-۱۳۶۴ به صورت ماهانه از سایت بانک مرکزی

1. Eryilmaz S. and Yalcin F. (2011)

جمع‌آوری شده‌اند، وضعیت تبادل‌پذیری (یا تبادل‌پذیری جزئی) را مورد ارزیابی قرار داده و متوسط زمان انتظار برای مشاهده روندهای صعودی را محاسبه خواهیم کرد.

از آن‌جا که هدف، تعیین روند قیمت سکه است، به جای مقادیر قیمت‌ها، افزایش یا کاهش آن‌ها را نسبت به ماه قبل در نظر می‌گیریم. این افزایش و کاهش را به ترتیب با ۱ و ۰ نشان می‌دهیم. نقطه شروع برای اولین ماه را صفر در نظر می‌گیریم. چون قبل از آن مشاهده‌ای در اختیار نداریم که کاهش یا افزایش قیمت را مشاهده کنیم. بنابراین دنباله تولید شده دنباله‌ای از ۰ و ۱ها، به طول ۳۲۴ خواهد بود. برای سادگی این دنباله را دنباله C می‌نامیم. انتظار می‌رود که قیمت سکه در هر ماه به قیمت در ماه‌های قبل خود وابسته باشد، بنابراین برای بررسی این موضوع از آزمون گردش با فرضیه صفر «استقلال داده‌ها» در مقابل «وابستگی بین داده‌ها» استفاده شد. براساس این آزمون، p- مقدار برابر با ۰/۰۱۵ به دست آمد که در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر رد شده و وجود وابستگی بین داده‌ها تأیید می‌شود. بنابراین دنباله C شرط استقلال را ندارد، پس ویژگی تبادل‌پذیری یا تبادل‌پذیر جزئی را برای دنباله C مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این‌جا از روش‌های بخش ۳، برای تعیین مرتبه وابستگی در دنباله C استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از آماره آزمون، رابطه (۷)، فرضیه صفر «تبادل‌پذیر بودن دنباله» در مقابل «تبادل‌پذیر جزئی بودن دنباله با مرتبه وابستگی ۱» را مورد آزمون قرار می‌دهیم. محاسبات برای این آزمون را با استفاده از برنامه‌نویسی در محیط R انجام داده‌ایم، تعداد تغییر وضعیت‌های ۰ و ۱، در دنباله C و مقدار آماره آزمون به صورت

$$U_{\cdot,1}(X) = \cdot/\cdot۱۷$$

$$t_{\cdot\cdot} = ۵۶ \;,\; t_{\cdot 1} = ۶۶ \;,\; t_{1\cdot} = ۶۶ \;,\; t_{11} = ۱۳۵$$

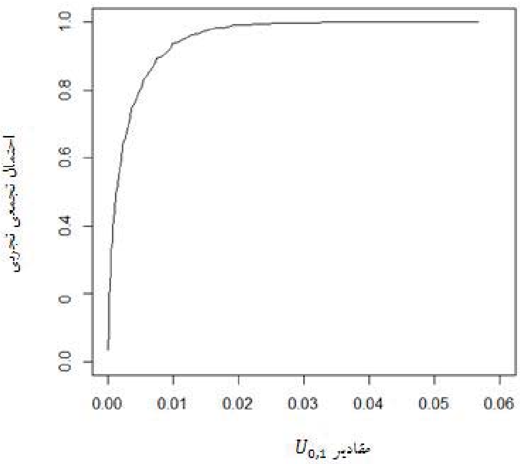
محاسبه گردید. همان‌طور که قبلاً بیان شد، برای دنباله‌های تبادل‌پذیر نسبت $\frac{t_{\cdot\cdot}}{t_{\cdot}}$ و $\frac{t_{1\cdot}}{t_{1}}$ نزدیک به یکدیگر خواهند بود، در نتیجه آماره آزمون مقداری بسیار کوچک خواهد داشت. اما در این‌جا مقدار آماره آزمون برابر ۰/۰۱۷ است که نسبتاً مقدار بزرگی است. بنابراین فرض تبادل‌پذیری داده‌ها رد می‌شود. اما برای اطمینان از صحت رد فرضیه صفر، آزمون مونت کارلو نیز به صورت زیر انجام می‌شود.

داده‌ها را ۱۰۰۰۰۰ مرتبه با توجه به تعداد ۱ها و ۰های موجود در دنباله C، شبیه‌سازی (مونت کارلو) کرده و آماره آزمون، رابطه (۷) را برای هریک از دنباله‌های شبیه‌سازی شده به‌دست آورده و تابع توزیع تجربی آنها را رسم می‌کنیم (شکل ۱). سپس p- مقدار را برای مقدار آماره حاصل از دنباله C به‌دست می‌آوریم که برابر با ۰/۰۲ است. بنابراین در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر رد می‌شود.

آماره آزمون رابطه (۷) ممکن است کاراترین آماره در داده‌های دنباله‌ای نباشد، چون براساس آماره بسنده به دست نیامده است. به همین دلیل از آماره نسبت درستنمایی رابطه (۹) نیز برای تعیین مرتبه وابستگی آن‌ها استفاده می‌شود. مقدار این آماره را با برنامه نویسی در محیط R محاسبه کرده‌ایم. این مقدار برابر ۵/۴۸ است. در بخش ۳ گفته شد این آماره به طور مجانبی دارای توزیع خی دو با

$۲^{k_۱} - ۲^{k_۲}$ درجه آزادی است که در آن $k_۱ = ۰$ و $k_۲ = ۱$، بنابراین مقدار این آماره آزمون در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ از مقدار کای دو با یک درجه آزادی یعنی، ۳/۸۴ بیشتر است.

شکل ۱. توزیع تجمعی تجربی مونت کارلو $U_{۰,۱}$ با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



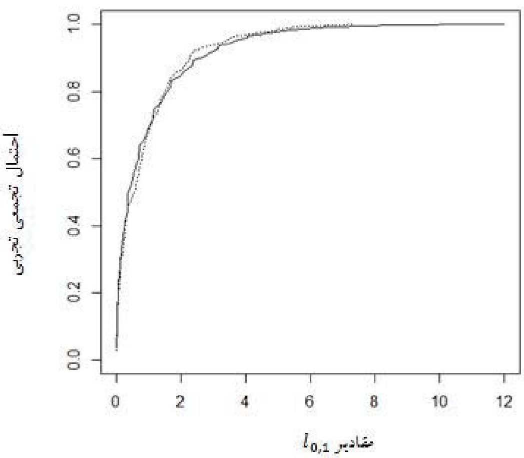
پس فرضیه صفر رد می‌شود. اما برای اطمینان از صحت رد فرضیه صفر در این مورد نیز آزمون مونت کارلو انجام شد و p- مقدار برای دنباله C برابر با ۰/۰۱۹ به دست آمد. هم‌چنین با استفاده از شکل ۲، می‌توان p- مقدار را تعیین کرد که برابر با همان ۰/۰۱۹ خواهد بود. بنابراین در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر رد می‌شود. در شکل ۲ نمودار توزیع تجمعی تجربی آماره آزمون $l_{۰,۱}$ به وسیله ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی با خط تیره و نمودار توزیع تجمعی کای دو با ۱ درجه آزادی با نقطه‌چین نشان داده شده است.

برای صحت مرتبه تبادل‌پذیر جزئی دنباله C، فرضیه صفر «تبادل‌پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۱» را در مقابل فرضیه «تبادل‌پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۲» می‌آزماییم. مقدار آماره آزمون (۸) با $k = ۱$، برابر با ۰/۰۰۵ می‌باشد که تقریباً مقداری کوچک است. پس می‌توان فرضیه صفر را پذیرفت. برای اطمینان از صحت این ادعا، با استفاده از آماره آزمون (۸)، آزمون مونت کارلو انجام می‌شود. p- مقدار برابر با ۰/۶۷ است. بنابراین در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ فرضیه صفر پذیرفته می‌شود.

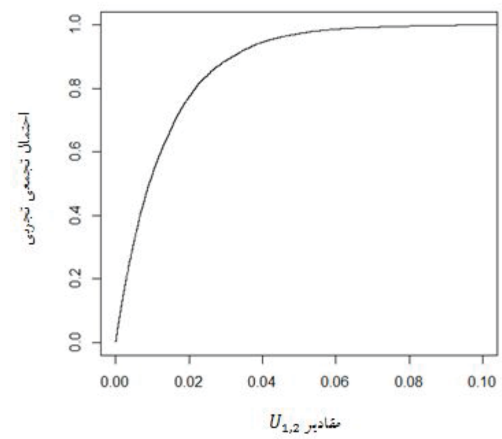
آزمون دیگر، آزمون نسبت درستنمایی با استفاده از آماره آزمون (۱۰) که در آن $k_۱ = ۱$ و $k_۲ = ۲$ می‌باشد. مقدار این آماره آزمون برای دنباله C برابر با ۰/۸۳ است که در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ از مقدار کای دو با ۲ درجه آزادی یعنی ۵/۹۹ کمتر است. بنابراین فرض تبادل‌پذیری جزئی با مرتبه وابستگی ۱ پذیرفته می‌شود. برای اطمینان بیشتر آزمون مونت کارلو انجام می‌شود. p- مقدار برای این فرضیه برابر با ۰/۷۹ می‌باشد. نتیجه می‌گیریم دنباله C، تبادل‌پذیر جزئی با مرتبه وابستگی ۱ است.

در شکل ۴، نمودار توزیع تجمعی $l_{1,2}$ به وسیله ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی با خط تیره و نمودار توزیع تجمعی خی دو با ۲ درجه آزادی را با نقطه‌چین نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های ۲ و ۴ نتیجه می‌گیریم، که توزیع مجانبی خی دو برای آماره آزمون در دنباله C، مناسب می‌باشد. زیرا در هر دو شکل دو نمودار بر یکدیگر منطبق شده‌اند.

شکل ۲. توزیع تجمعی خی دو با ۱ درجه آزادی و مونت کارلو $l_{0,1}$ با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



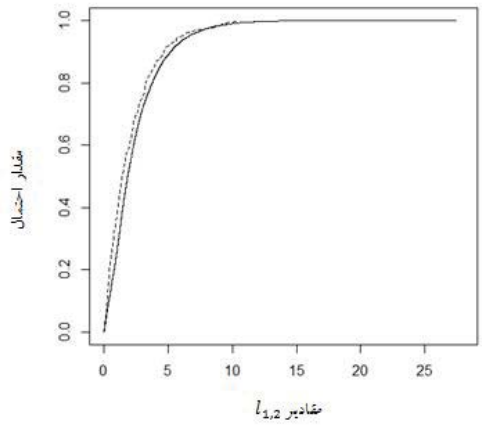
شکل ۳. توزیع تجمعی تجربی مونت کارلو $U_{1,2}$ با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



حال که مرتبه وابستگی دنباله C مشخص شد، برای تعیین امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردشی به طول k، طبق روابط (۲۰) یا (۲۱)، باید توزیع آمیزنده مشخص شود. معمولاً در

فرایندهای تبادل‌پذیر جزئی، توزیع آمیزنده را توزیع بتا در نظر می‌گیرند. اما توزیع بتا دارای پارامترهایی است که برای به‌دست آوردن امید ریاضی مربوطه نیاز به تعیین آن‌ها می‌باشد.

شکل ۴. توزیع تجمعی کای دو با ۲ درجه آزادی و مونت کارلو $l_{۱,۲}$ با ۱۰۰۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی



همان‌طور که در بخش ۴ بیان شد برآورد پارامترهای توزیع بتا را می‌توان به روش ماکزیمم درستنمایی و با استفاده از روش کوییتانا و نیوتن[1] به‌دست آورد. توجه داشته باشید، در این روش باید چند دنباله مستقل و هم‌توزیع $P_۱,\dots,P_k$ که دارای توزیع بتا می‌باشند وجود داشته باشد. در این‌جا فقط یک نمونه از قیمت سکه (دنباله C) در اختیار داریم. تعداد ۳۵ دنباله هر کدام به طول ۳۲۴ با ویژگی تبادل‌پذیر جزئی و مرتبه وابستگی ۱ مانند دنباله C شبیه‌سازی می‌کنیم. براساس این دنباله‌ها $P_۱,\dots,P_k$ ساخته می‌شوند. برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای توزیع بتا محاسبه می‌گردند. مقدار برآورد شده این پارامترها عبارتند از

$$\hat{a}_{۰}=۹ \ , \ \hat{b}_{۰}=۲۰ \ , \ \hat{a}_{۱}=۲۹ \ , \ \hat{b}_{۱}=۵۸$$

حال با توجه به مقادیر پارامترها می‌توان متوسط تعداد ماه‌های مورد انتظار برای رسیدن به اولین زمانی که k مرتبه قیمت سکه به طور متوالی افزایش یابد را با استفاده از (۲۰) به‌دست آوریم. مقادیر برای طول گردش‌های موجود در دنباله C با استفاده از رابطه (۲۰) و میانگین تجربی تعداد ماه‌ها برای اولین زمان رسیدن به گردشی با طول‌های موجود در دنباله C با در نظر گرفتن وضعیت اولیه صفر، در جدول ۱ محاسبه شده است.

1. Quintana FA. And Newton MA. (1999)

جدول ۱. امید ریاضی و میانگین تجربی اولین زمان قابل انتظار برای مشاهده گردشی‌هایی به طول k

k	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۴
$E(U_k \mid X_۱ = ۰)$	۴	۷	۱۳	۲۱	۳۳	۵۳	۸۴	۱۳۴	۲۱۳	۱۴۴۸
میانگین تجربی	۵	۹	۱۵	۲۰	۳۳	۳۸	۵۷	۱۰۳	۱۵۵	۳۰۴

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین تجربی دنباله C با امید ریاضی اولین زمان انتظار برای مشاهده گردش‌هایی با طول‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقریباً برابر هستند. یکی از دلایلی که این دو مقدار برای گردش‌هایی با طول‌های ۷ به بعد نزدیک به هم نیستند، این است که احتمال وقوع گردش‌هایی با این طول‌ها در چنین دنباله‌هایی کم است، خصوصاً گردشی با طول ۱۴ که احتمال وقوع آن با این تعداد ۱ و ۰ در یک دنباله تبادل‌پذیر جزئی بسیار ناچیز است. دلیل دیگر وابستگی از مرتبه ۱ در دنباله تبادل‌پذیر جزیی است. چون امید ریاضی و میانگین تجربی برای گردشهایی به طول ۲ تا ۶ در جدول ۱ تقریباً برابر هستند. می‌توان با استفاده از این امید ریاضی، زمان انتظار برای رسیدن به $k = ۲,۳,۴,۵,۶$ ماه افزایش قیمت را به طور متوالی به دست آورد. بدین مفهوم که اگر هر زمانی قیمت سکه کاهش یافت، یعنی مقدار صفر را مشاهده کردیم (چون اولین وضعیت صفر در نظر گرفته شده است)، به طور متوسط $E(U_k \mid X_۱ = ۰)$ ماه باید انتظار کشید تا در پایان این انتظار k ماه متوالی قیمت سکه افزایش یابد. به عنوان مثال، اگر هم اکنون کاهش قیمت سکه را مشاهده کنیم، باید به طور متوسط سیزدهم ۱۳ ماه انتظار بکشیم تا در ۴ ماه متوالی آخر این ۱۳ ماه افزایش قیمت سکه را شاهد باشیم.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله دنباله‌ای دودویی از افزایش و کاهش قیمت سکه را محاسبه و صحت تبادل‌پذیری جزیی و مرتبه وابستگی آن را با استفاده از آزمون تبادل‌پذیری جزیی و آزمون نسبت درستنمایی مورد ارزیابی قرار دادیم. با در نظر گرفتن ماتریس توزیع بتا و ماتریس فراوانی انتقال از روی مشاهدات، پارامترهای توزیع تغییر وضعیت بتا براساس روش گفته شده در بخش ۴ برآورد شد. نتایج نشان می‌دهد که داده‌های دودویی تبادل‌پذیر جزیی از مرتبه یک هستند. با استفاده از مقادیر برآورد شده پارامترها، امید ریاضی زمان انتظار برای رسیدن به اولین گردش موفقیت با طول‌های مختلف را به صورت نظری و تجربی محاسبه و مقایسه کردیم. نتایج در جدول ۱ نشان می‌دهد که به دلیل تبادل‌پذبری جزیی داده‌ها از مرتبه یک، روش برای متوسط زمان انتظار مشاهده طول‌های روند صعودی تا ۶ ماه بخوبی با میانگین تجربی برابری می‌کند، اما برای بیش از ۶ ماه برآوردها اختلاف دارند که این به خاطر وابستگی مرتبه ۱ در تبادل‌پذیر بودن داده‌ها می‌باشد. بنابراین براساس داده‌های موجود انتظار می‌رود که دوره‌های افزایش نرخ سکه با این روش حداکثر تا شش ماه قابل پیش‌بینی باشد. پس با این روش می‌توان متوسط زمان (ماه) انتظار برای مشاهده ۲ الی ۶ ماه افزایش متوالی قیمت سکه را پیش‌بینی کرد.

منابع

Balakrishnan, N. and Koutras, M.V. (2002), *Runs and Scans with Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics.

Billingsley, P. (1961), *Statistical Inference for Markov Processes*, University of Chicago Press, Chicago.

De Finetti B., Funzione Caratteristica di un Fenomeno Allatorio and Attidella R. (1931), Accademia Nazionale dei Lincii Ser. 6, Memorie, Classe di Scienze, Fisiche, Matematiche e Naturali, 4, 251–299.

De Finetti, B. (1974), *Probability, Induction and Statistics*, New York , John Wiley and Sons.

Diaconis, P. and Freedman, D. (1980), “De Finetti’s Theorem for Markov chains”, *The Annals of Probability*, 8, 115–130.

Diaconis, P. and Freedman, D. (1980), “Finite Exchangeable Sequences”, *The Annals of Probability*, 8, 745-764.

Eryilmaz, S. (2005), “The Longest Run Statistic Associated with Exchangeable Binary Variables”, *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences,* 29, 105-111.

Eryilmaz, S. (2008), “Distribution of Runs in a Sequence of Exchangeable Multi-State Trials”, *Statistics and Probability Letters*, 78, 1505–1513.

Eryilmaz, S. (2009), “Mean Success Run Length”, *Journal of the Korean Statistical Society,* 38: 65–71.

Eryilmaz, S. (2011), “Joint Distribution of Run Statistics in Partially Exchangeable Processes”, *Statistics and Probability Letters*, 81, 163-168.

Eryilmaz, S. and Demir, S. (2007), “Success Runs in a Sequence of Exchangeable Binary Trials”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2954–2963.

Eryilmaz, S. and Yalcin, F. (2011), “Distribution of Run Statistics in Partially Exchangeable Processes”, *Metrika*, 73, 293-304.

Fu, J. C. and Lou, W. Y. W. (2003), “Distribution Theory of Runs and Patterns and its Applications, A Finite Markov Chain Imbedding Technique”, *World Scientific Publishing*.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995), *Beta Distributions, Continuous Univariate Distributions,* 2nd Edition, New York, John Wiley.

Katz, R. (1981), “On Some Criteria for Estimating the Order of a Markov Chain”, *Technometrics*, 23, 243-249.

Makri, F. S., Philippou, A. N. and Psillakis, Z. M. (2007), “Shortest and the Longest Length of Success Runs in Binary Sequences”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2226–2239.

Martin, J. (1967), *Bayesian Decision Processes and Markov chain*, New York, John Wiley and Sons.

Meshkani, M. R. and Billard, L. (1992), “Empirical Bayes Estimators for a Finite Markov Chain”, *Biometrika*, 79, 185-193.

Quintana, F. A. and Newton, M. A. (1998), “Assessing the Order of Dependence for Partially Exchangeable Data”, *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 194–202.

Quintana, F. A. and Newton, M. A. (1999), “Parametric Partially Exchangeable Models for Multiple Binary Sequences”, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 13, 55–76.