هم انباشتگی[1]: مفاهیم، اهمیت اقتصادی، نقاط قوت و ضعف

نویسندگان: دکتر منوچهر عسگری
تیمور محمدی
دانشگاه علامه طباطبایی

مقدمه

به نظر می‌آید بسیاری از تخمینهای مدلهای اقتصادسنجی که معنی‌دار بودن آماری آنها مورد تأیید قرار گرفته‌اند از نوع "رگرسیون جعلی"[2] هستند. مشاهده می‌شود که به محض آن‌که آماره t از عدد ۲ به شکل قدر مطلق فراتر می‌رود، معنی‌دار بودن رگرسیون مستفاد می‌شود. شواهد زیادی در سالهای اخیر به دست آمده‌اند که نشان می‌دهند حتی، در رگرسیون متغیرهایی که اصولاً به هم مرتبط نیستند، می‌توان آماره t معنی‌داری به دست آوردو البته، در رگرسیون کلاسیک کتب درسی این اخطار آمده است که باید تمام فروض کلاسیک برقرار باشند، تا بتوان به صحت آماره t یا آماره‌های دیگر اعتماد کرد ولی، در عمل، این اخطارها جدی در نظر گرفته نشده‌اند.

گرانجر[3] و نیوبولد[4] (۱۹۷۷) در یک شبیه سازی که متغیرهای مستقل و وابسته در آن از نوع

---

۱. این واژه ترجمه کلمه Cointegration است. ترجمه‌های زیادی برای این کلمه مطرح شده است. از جمله آنها واژه همگرایی است. در حالی که کلمه همگرایی، به عنوان برگردان اصطلاح Convergence در ادبیات فارسی اقتصاد جا افتاده است. ضمناً Cointegration به چیزی بیش از همگرایی دلالت دارد. یعنی اولاً باید حالت انباشتگی طی زمان برای هر متغیر اثبات شود و ثانیاً رابطه متقابل آنها نشان داده شود.

2. Spurious Regression

3. Granger

4. Nowbold

گام تصادفی[1] بوده‌اند (برای ملاحظه تعریف متغیرگام تصادفی ر.ک.ب. بخش ۱) توانستند که در بیشتر موارد آماره t معناداری به دست آورند. در حالی که می‌دانیم متغیرهای از نوع گام تصادفی، فی‌نفسه، رابطه علت و معلولی با همدیگر ندارند. دلیل این امر ذیلاً خواهد آمد ولی، اینجا این نکته یادآوری می‌شود که در همین شبیه‌سازی این دو محقق به این نتیجه رسیدند که یکی از علائم مشخصه در این رابطه آن است که در بیشتر موارد ضریب تعیین (R^2) از آماره دوربن - واتسون (DW) بیشتر است. این امر در واقع یکی از نخستین آزمونها برای تشخیص رگرسیون جعلی بود.

هم‌انباشتگی از ابزارهای تحلیلی‌ای است که طی پانزده سال گذشته به سرعت توسعه یافته و مبنایی را فراهم می‌آورد تا بتوان براساس آن رگرسیونهای حاوی متغیرهای گام تصادفی را پذیرفت. بنابراین، می‌توان آن را به عنوان توجیهی برای بسیاری رگرسیونها در نظر گرفت.

هدف این مقاله بررسی مختصر، و حتی‌الامکان، غیرفنی از این مبحث جدید است، تا هر خواننده با درک ابتدایی و متوسط از اقتصادسنجی بتواند به زیر بنای فکری، نقاط قوت و ضعف، دلایل جا افتادن آن به عنوان ابزاری همه گیر و همچنین، نحوه نتیجه گیری به وسیله این روش، پی‌ببرد.

قبل از شروع بحث لازم می‌دانیم این مطلب را بیان کنیم که گرچه در حال حاضر بدنه‌ای تنومند از "ادبیات" حول این موضوع تدوین شده است اما، بهتر دانستیم که چند منبع بسیار مهم و مفید را، علاوه بر آنچه که در فهرست منابع آورده‌ایم، در اینجا ذکر کنیم. خوانندگان علاقمند به این موضوع می‌توانند از این منابع بهره کافی ببرند. و در واقع، این منابع بهترین منابع در دسترس برای حصول اطلاع راجع به این زمینه تحقیقی است:

1) *Oxford Bulletin of Economics and statistics* (1986)

2) Hall, S.G. and Henry, S.G.B (1988), *Macroeceonomics Modelling,* North Holland, Amsterdam.

3) Dolado, J.J, Jenkinson, T. and Sosvilla - Rivera, S. (1990), "Cointegration and Unit Roots: A Survey", *Journal of Economic Surveys,* Vol. 4. No.3.

1. Random walk

ترتیب بخشهای مقاله به صورت زیر می‌باشد:

ابتدا راجع به پیش نیازهای بحث هم‌انباشتگی صحبتی خواهیم داشت. در این قسمت راجع به فرآیندهای گام تصادفی، مانایی سری زمانی، آزمونهای ریشه واحد و انباشتگی بحث خواهیم کرد در قسمت دوم مقاله، هم‌انباشتگی تعریف شده و مفاهیم مربوطه تشریح می‌گردند. در قسمت سوم به اهمیت اقتصادی هم‌انباشتگی پرداخته و تناظر بین مفاهیم اقتصادی و آماری مورد تأکید قرار می‌گیرد. در قسمت چهارم شکل تصحیح خطای متغیرهای هم انباشته نمایش داده می‌شود. موضوع قسمت پنجم تخمین بردار هم‌انباشتگی است. قسمت ششم به آزمون هم‌انباشتگی اختصاص دارد. در قسمت هفتم نقاط قوت و ضعف این تحلیل تشریح می‌شود. در قسمت هشتم یک بحث جانبی راجع به نحوه حذف روند از سریهای زمانی خواهیم داشت. قبل از پرداختن به یک مثال کاربردی از اقتصاد ایران در بخش ۹ خلاصه‌ای از نحوه عمل تابد آنجا، ارائه شده و نهایتاً کاربردی از اقتصاد ایران، در رابطه با مصرف و درآمد ارائه خواهد شد. مقاله را با نتیجه گیری و خلاصه به پایان می‌بریم.

۱. پیش نیازها

قبل از بحث راجع به تحلیل هم انباشتگی باید با یکسری پیش‌نیازها آشنایی داشت:

الف - آشنایی با متغیرهای گام تصادفی [1]

یک متغیر گام تصادفی با مقدار ثابت به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t$$

که در آن μ مقدار ثابت و u_t یک متغیر تصادفی اخلال خالص (آوای سفید) [2] است. می توان ثابت کرد که طریقه دیگر نمایش معادله بالا به صورت زیر می‌باشد:

---

۱. برای ملاحظه بحثی مفصل و جامع در رابطه با متغیرهای گام تصادفی ر.ک.ب
Pindyck, R.S. and D.L. Rubinfeld: *Econometric Models and Econometric Forecasts*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

2. White Noise

$$x_t = \mu t + \sum u_g$$

که t متغیر روند است. بنابراین، متغیرهای تصادفی با مقدار ثابت دارای روند زمانی هستند لذا، اگر بر همدیگر رگرس شوند رابطه معنی‌داری بین آنها برقرار می‌شود که مربوط به روند زمانی است؛ و نه رابطه علت و معلولی بین آنها. نتیجه آن که x یک متغیر تصادفی است که واریانس آن حول یک روند خطی در حال افزایش است. این خاصیت یک متغیر نامانا است. (برای بحث دقیقتر راجع به مانایی به بخش بعد مراجعه کنید).

همان طور که بیان خواهد شد، مشکل اصلی در این است که بسیاری از متغیرهای کلان اقتصادی را می‌توان به صورت گام تصادفی با مقدار ثابت رابطه (۱) یا به صورت زیر که فرآیند روند - مانا نامیده می‌شود. ارائه کرد:

$$x_t = \mu + \beta t + u_t$$

پس، عجیب نیست که رگرسیونهای حاوی متغیرهای فوق، به دلیل عنصر مشترک روند معمولاً، رابطه معنی‌داری را به دست می‌دهند. گرانجر و نیوبولد (۱۹۷۷) به برازش این رگرسیونها اکتفا نکردند بلکه مقدار ثابت را از رابطه (۱) حذف کرده، و به بررسی رگرسیونهای حاصله که شامل این متغیرهای خالص گام تصادفی است، پرداختند. نتیجه این بود که در این حالت اخیر نیز، رابطه معنی‌دار بین متغیرها به دست آوردند.

مشخصه مشترک تمام سریهای فوق داشتن ریشه واحد است (ر.ک.ب. بخش بعد). در یافته‌های گرانجر و نیوبولد و سایرین وجود ریشه واحد نقش اساسی را بازی می‌کند و در واقع، همین ریشه واحد است که منجر به رگرسیون جعلی می‌شود.

ب - مانایی

تعریف: یک سری زمانی x_t "مانا"[1] نامیده می‌شود اگر، میانگین، واریانس و اتوکو واریانسهای آن مستقل از زمان باشد یعنی:

---

۱. ما واژه "مانا" را به عنوان برگردان کلمه Stationary به کار می‌بریم. در سالهای اخیر از واژه‌های دیگری نیز استفاده شده مثل ایستا یا پایدار. ولی به نظر ما برگردانهای فوق مطلوب نیستند چراکه در ادبیات اقتصادی واژه "ایستا" به عنوان ترجمه Static و واژه "پایدار" به عنوان ترجمه کلمه Stable جا افتاده‌اند.

$$(۱)\ E(x_t) = \mu$$

$$(۲)\ E[(x_t - \mu)^2]$$

$$(۳)\ E[(x_t - \mu)\,(x_{t-\tau} - \mu)]] = \theta(\tau) \qquad \tau = 1, 2, 3, \ldots$$

البته، این شکل تعریف از مانایی به مانایی کوواریانسی یا مانایی ضعیف معروف است. برای بحثی بیشتر راجع به مانایی دقیق ر.ک.ب.هاروی[1] (۱۹۸۱).

حال به این سؤال می‌پردازیم که عبارت (۳) - (۱) چه می‌گویند؟

عبارات (۱) و (۲) می‌گویند که واریانس و میانگین به زمان وابستگی ندارند و عبارت (۳) بیان می‌دارد که کوواریانس بین هر دو مقدار از x طی زمان (اتوکوواریانس) *تنها* بستگی به *فاصله زمانی بین آن دو دارد* و اندیس زمانی دو مقدار فی‌نفسه مهم نیست. پس، به طور خلاصه سه عبارت فوق می‌گویند که میانگین، واریانس و کوواریانسها مستقل از زمان می‌باشند. سؤال بعد این است که وجود مانایی را چگونه می‌توان آزمون کرد؟

یک راه، محاسبه کمیتهای نمونه‌ای متناظر با کمیتهای جامعه (۱) - (۳) و سپس، تهیه نمودار ضرایب همبستگی[2] است مثلاً، برای برآورد کمیتهای (۱) - (۳) می‌توان از عبارات زیر استفاده نمود: (T بیانگر حجم نمونه است)

$$(۱)'\quad \mu = x = \frac{\sum x_t}{T}$$

$$(۲)'\quad \theta(o) = \frac{\sum (x_t - \mu)^2}{T}$$

$$(۳)'\quad \theta(\tau) = \frac{\sum (x_t - x)\,(x_{t-\tau} - x)^2}{T}$$

می‌توان ثابت کرد که عبارات ′(۳) - ′(۱) تخمینهای سازگاری از کمیتهای (۳) - (۱) به دست می‌دهند. اگر اتوکوواریانسهای نمونه را بر واریانس نمونه تقسیم نماییم، ضرایب خود همبستگی نمونه‌ای به دست می‌آیند:

1. Harvey

2. Correlogram

$$r(\tau) = \frac{\theta(t)}{\theta(o)} \qquad \tau = 1,2,3,...$$

حال اگر نمودار این ضرایب را در مقابل زمان (t) رسم کنیم، نمودار همبستگی به دست می‌آید. قاعده تصمیم‌گیری بر مبنای این ضرایب راجع به مانایی بدین صورت است که *اگر نقاط نمودار همبستگی سریعاً به سمت محور افقی (صفر) میل کند آن سری مانا؛ و در غیر این صورت نامانا*[1] *است*. (برای ملاحظه مثالی از این نمودار ر.ک.ب بخش ۱۰)

البته، این یک آزمون بصری است و چه بسا که سری‌ای که به چشم یک نفر مانا به نظر می‌رسد به‌نظر فرد دیگر نامانا باشد پس، ناگزیر از روی آوردن به راه حلهای رسمی‌تر هستیم. معروفترین این راهها، آزمونهای ریشه واحد[2] نام دارد.

بحث در این رابطه را با نظر دو پژوهشگر اقتصادی معاصر به نامهای نلسون و پلوسر شروع می‌کنیم.[3] به نظر آنها "بسیاری از سریهای زمانی اقتصادی با یک بار تفاضل‌گیری مانا می‌شود" که، به عبارت دیگر، فرایندهای با تفاضل‌گیری مانا[4] (DSP) نامیده می‌شوند. در این صورت، قطعاً باید بتوان سری مربوطه را به شکل زیر نوشت:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۴)$$

یا :

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

که ε_t یک کمیت تصادفی است که فرض می‌شود میانگین صفر دارد پس، اگر x_t یک فرآیند DSP می‌باشد باید:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$Co(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-\tau}) \qquad \tau = 1, 2, 3, ...$$

$$Var = (\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$$

1. Nonstationary
2. Unit - root Tests
۳. ر.ک.ب. الیویر بلانچارد، استانلی فیشر، *درسهایی در اقتصاد کلان*، ترجمه محمود ختایی و تیمور محمدی، جلد اول، سازمان برنامه و بودجه، ۱۳۷۶.
4. Difference Stationary Processes

باشد. پس، طبق حکم نلسون و پلوسر یک سری یا مانا است؛ یا اگر نباشد با یک بار تفاضل‌گیری مانا می‌شود. بنابراین، می‌توان برای آزمون مانایی ابتدا معادله (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$x_t = \beta x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۵)$$

و سپس، فرضیه $|\beta| = 1$ را در مقابل $|\beta| < 1$ آزمون نمود. حالت $|\beta| = 1$ دلالت بر DSP بودن، و حالت $|\beta| < 1$ دلالت بر مانایی دارد.[1]

اصطلاحاً اگر $|\beta| = 1$ باشد، x_t را یک فرآیند گام تصادفی نامند، و آزمون وجود آن را آزمون ریشه واحد نامند. ممکن است سؤال شود که چرا در این آزمون حالت $|\beta| > 1$ را در نظر نمی‌گیریم؟ زیرا $|\beta| > 1$ بودن نشانگر یک فرآیند انفجاری است که با داده‌های اقتصادی سنخیت ندارد. پس، به طور خلاصه، باید آزمون کنیم که آیا $|\beta| = 1$ می‌باشد، یا خیر.

مشکل چنین آزمونی این است که کامپیوترها مقادیر آماره آزمون t را همواره تحت فرضیه صفر بودن ضریب به دست می‌دهند؛ نه تحت فرضیه یک بودن آن. لذا، می‌توان با تغییری مناسب اطلاعات لازم را از کامپیوترها به راحتی دریافت کرد. کافی است از طرفین رابطه (۵) x_{t-1} را کسر کنیم؛ داریم:

$$x_t - x_{t-1} = \beta x_{t-1} - x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta x_t = (\beta - 1)\, x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta x_t = \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۶)$$

که $\beta - 1 = \gamma$ می‌باشد. پس، آزمون $\beta = 1$ به آزمون $\gamma = 0$ تبدیل شد که این هم به راحتی به وسیله آماره t مربوطه به وسیله کامپیوترها داده می‌شود. پس، حال می‌توان معادله (۶) را به عنوان یک معادله رگرسیونی برازش کرده و آزمون $\gamma = 0$ را انجام داد. اگر $H_0: \gamma = 0$ رد شود، x_t مانا است؛ در غیر این صورت DSP و نامانا خواهد بود.[2]

در این جا خواننده بلافاصله به فکر استفاده از جدول t برای بررسی آزمون فوق می‌افتد اما،

۱. برای ملاحظه اثبات مانایی در حالت $|\beta| < 1$ طبق تعریف مانایی ر.ک.ب *کاربرد تحلیل رگرسیونی*، نوشته ویتینک، ترجمه دکتر حمید ابریشمی و تیمور محمدی، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۵، ص ۲۴۸.
۲. برای ملاحظه روش آزمون ر.ک.ب. همان منبع، ص ۵۳.

دیکی و فولر[1] که مختصراً با DF نشان داده می‌شوند (۱۹۷۹) نشان داده‌اند که تخمین تحت فرضیه $\gamma = ۰$ در صورتی که β به یک نزدیک باشد حول صفر توزیع نشده بلکه حول رقمی کمتر از صفر متمرکز است. پس، جداول t معمول (یا آزمون F معمول در حالت وجود قیدهایی به جز $\gamma = ۰$) در این جا قابل استفاده نیست. خود دیکی و فولر جدول تصحیح شده‌ای را برای توزیعهای مجانبی آماره t (که مطابق معمول حساب می‌شود) به دست آورده‌اند. پس، برای آزمونهای ریشه واحد ($\gamma = ۰$ یا $\beta=۱$) ابتدا آماره t کامپیوتر را دیده اما، از جداول دیکی و فولر برای بررسی معنادار بودن استفاده می‌کنیم.

تا این جا، بحث نظری بود. حال به مشکلی در عمل می‌پردازیم. مشکل این است که ممکن است یک سری x_t نامانا باشد ولی، با تفاضل‌گیری هم مانا نشود زیرا عنصری از روند (زمان) در آن وجود داشته، یا آن که ممکن است خود ε_t کمیت تصادفی کاملاً مستقل یا میانگین صفر (اخلال خالص) نباشد. در حالت اول باید متغیر روند، و در حالت دوم باید تفاضلهایی از متغیر توضیحی را به طور با وقفه وارد کرد[2] تا خودهمبستگی احتمالی حذف شود. پس، به جای مدل (۶) در عمل از آزمون زیر استفاده می‌شود که هم وجود روند را؛ و هم امکان اخلال خالص نبودن ε_t را در نظر می‌گیرد.

$$(۷) \quad \Delta x_t = a + \delta t + \gamma x_{t-۱} + \Sigma \lambda_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

این رگرسیون را رگرسیون دیکی فولر گسترش یافته[3] نامند. الان اگر بخواهیم آزمون صفر بودن γ را انجام دهیم، باید از آماره t مربوطه که دیکی فولر با τ نشان می‌دهند همراه با جدول مربوطه استفاده کنیم. (1979, P.373) مادامی که τ بیشتر از نقطه بحرانی مربوطه باشد (ناحیه فوق همیشه منفی است چرا که فرضیه H۱ به صورت $\gamma<۰$ می‌باشد) آنگاه می‌توان فرضیه عدم وجود ریشه

1. Dicky - Fuller

۲. برای ملاحظه بحثی راجع به تعیین طول وقفه (m)، ر.ک.ب : پسران، هاشم، ری، سی فیر، *اقتصادسنجی*، ترجمه تیمور محمدی، دانشگاه امام حسین (ع)، ۱۳۷۴. اما به هر حال یک معیار معمول برای تعیین طول وقفه معیار AIC (m) یا معیار اطلاع آکایکه است (Akaike's information criterion) برای بسیاری مطالعات سالانه ایران طول وقفه ۲ بهترین است.

3. Augmented Dickey - Fuller (ADF)

واحد را رد کرد.

اما، حالا که شکل مدل به (۷) مبدل شده است پیدا کردن ریشه واحد، برای مانایی تفاضل مرتبه اول سری کافی نیست؛ چرا که اگر ضریب روند (t) غیر صفر باشد، تفاضل مرتبه اول به زمان بستگی دارد و لذا، تفاضل سری فوق مانا نخواهد شد. پس، بایستی فرضیه همزمان $\gamma=0$ و $\delta=0$ مورد آزمون قرار بگیرد. قاعدتاً، این فرضیه با آماره F ضورت می‌گیرد (اعمال قید در رگرسیون) منتها باز بایستی از جدول دیگری که دیکی فولر تهیه کرده‌اند و آماره مربوطه را با φ_3 نشان داده‌اند استفاده کرد (جدول (1981, p.1063, VI) و حال اگر آماره φ_3 کوچکتر از نقطه بحرانی باشد نمی‌توان فرضیه H_0 را رد کرد یعنی، تفاضل مرتبه اول مانا خواهد بود. (البته دیکی و فولر مقادیر را برای معادله بدون جملات با وقفه تفاضلهای x ارائه کرده‌اند)

ج - انباشتگی

حال که پیش‌نیاز مانایی را بررسی کردیم به پیش‌نیاز بعدی می‌پردازیم.

تعریف: یک سری انباشته[1] از درجه d می‌باشد اگر، بتوان سری فوق را با d بار تفاضل‌گیری مانا کرد که این امر را با نماد I(d) نشان می‌دهیم. اگر کمیتی مانا باشد در واقع I(0) است.

بنابراین، اگر x_t با یک بار تفاضل‌گیری مانا شود داریم $x_t \sim I(1)$. پس، اگر x_t یک فرآیند گام تصادفی باشد (DSP) می‌توان گفت $x_t \sim I(1)$.

اگر x_t با دو بار تفاضل‌گیری مانا شود داریم:

$$\Delta\Delta x_t = \Delta^2 x_t = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) \sim I(0)$$

و

$$x_t \sim I(2)$$

طبق آنچه که در مبحث قبلی گفتیم با کاربرد آزمونهای ریشه واحد می‌توان به درجه انباشتگی یک سری پی برد.

1. Integrated

۲. هم‌انباشتگی

اگر دو سری زمانی x_t , y_t مفروض باشند آنگاه چنانچه:

الف) هر دو دارای درجه انباشتگی یکسان d بوده و؛

ب) ترکیبی خطی از x_t , y_t انباشته از درجه b باشد که b کوچکتر از d است آنگاه، دو سری x_t , y_t هم انباشته از درجه b,d نامیده می‌شوند و به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \sim CI(b,d)$$

بردار ضریب ترکیب خطی که باعث هم انباشتگی بین سریها شده است، *بردار هم انباشتگی*[1] نام دارد. مثلاً، فرض شود x_t , y_t هر دو $I(1)$ بوده و $x_t - bY_t$ کمیتی $I(0)$ باشد. آنگاه، ترکیب خطی که مانا است عبارت می‌باشد از: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ (b- و ۱) که در این صورت (b- و ۱) بردار هم انباشتگی است.

۳. اهمیت اقتصادی هم انباشتگی

تا اینجا، عمدتاً، مفاهیم آماری مورد بحث قرار گرفته و راجع به تئوری اقتصادی صحبتی نکردیم؛ حال به اهمیت اقتصادی هم انباشتگی می‌پردازیم. تئوری اقتصادی معمولاً بین متغیرهای موردنظر خود، *رابطه‌ای تعادلی* را بیان می‌دارد. به عبارت دیگر، گفته می‌شود که برخی جفتهای متغیرهای اقتصادی نبایستی خیلی زیاد (حداقل در بلندمدت) از هم فاصله بگیرند. البته، این متغیرها ممکن است در کوتاه‌مدت، یا به دلایل فصلی گرایش به جدایی داشته باشند. اما، اگر در بلندمدت فاصله بسیاری از هم بگیرند آنگاه، نیروهای اقتصادی مثل مکانیزم بازار یا دخالت دولت شروع به نزدیک کردن آنها به هم می‌کند. مثالهای این متغیرها عبارتند از: نرخهای بهره روی داراییهای با سررسید مختلف، قیمت یک کالا در مناطق مختلف کشور، ارزش فروش و هزینه‌های تولید یک رشته فعالیت، قیمتهای جاری و سلف کالاها، سطح عمومی قیمتها و عرضه پول.

1. Cointegrating vector

حال برای انجام بحث، دو متغیر مصرف و درآمد قابل تصرف را در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که x_t مصرف در زمان t و y_t درآمد قابل تصرف در زمان t باشد. طبق تئوری اقتصادی کلان یک رابطه بلندمدت بین مصرف و درآمد به شکل زیر باید برقرار باشد:

$$x = by \quad (۸)$$

در این صورت اگر مصرف در هر لحظه از زمان در مسیر تعادلی باشد از (۸) داریم:

$$x_t - by_t = 0 \quad (۹)$$

اما، می‌دانیم که لزوماً و در واقع، در هر لحظه از زمان این رابطه برقرار نیست. پس، حتی اگر معادله (۸) یک رابطه تعادلی باشد لازم نیست که (۹) در تمام لحظات برقرار باشد. به این ترتیب، مدل ریاضی رابطه بین مصرف و درآمد خارج از تعادل عبارت خواهد بود از:

$$x_t - by_t = \varepsilon_t \quad (۱۰)$$

که ε_t "خطای عدم تعادل"[1] نام دارد. حال اگر واقعاً مفهوم تعادل معنا داشته باشد، بایستی فرآیند زیربنای مصرف-درآمد به گونه‌ای باشد که خطای عدم تعادلی ε_t، حول مقدار صفر (میانگین خود) نوسان کند. به عبارت دیگر، متغیرهای موجود در رابطه تعادلی با عوامل مقیاس مناسب (۱ و b) نبایستی از هم فاصله زیادی بگیرند. پس، می‌توان معادله (۱۰) را به صورت یک رگرسیون نوشت:

$$x_t = by_t + \varepsilon_t \quad (۱۱)$$

که در آن $\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$ یعنی ε_t با میانگین صفر و واریانس σ^2 توزیع شده است. اما این مشخصه ε_t که دارای میانگین صفر و واریانس معین است (و نیز به طور مستقل توزیع شده است) را می‌توان به صورت $\varepsilon_t \sim I(0)$ نوشت که یعنی دارای خاصیت مانایی است. پس $x_t - by_t \sim I(0)$ می‌باشد.

از بحث بالا چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ اگر بپذیریم که طبق حکم نلسون و پلوسر داده‌های اقتصادی مثل مصرف و درآمد انباشته از درجه یک یا I(۱) هستند، در صورتی که یک رابطه تعادلی بین آن دو در قالب تابع مصرف وجود داشته باشد، ترکیب خطی آن دو با عوامل مقیاس ۱ و b مانا یا I(۰) است. پس، طبق تعریف بحث قبلی می‌توان نوشت:

1. Disequilibrium Error

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \sim CI(1,0)$$

بدین ترتیب، ثابت شد که وجود رابطه تعادلی بلندمدت بین مصرف و درآمد دلالت بر آن دارد که دو متغیر هم‌انباشته هستند. به زبان انجل [۱] و گرانجر (1987):

"هم انباشتگی بدان معنا است که اگر عناصر x_t , y_t، کمیتهای $I(1)$ باشند آنگاه، خطای تعادلی $I(0)$ بوده و ε_t به ندرت از صفر فاصله زیاد می‌گیرد یعنی، تعادل کراراً رخ می‌دهد. در حالی که اگر x_t , y_t هم انباشته نباشند، ε_t به شدت از صفر منحرف شده و به ندرت با آن مساوی می‌شود. در این صورت وجود تعادل معنا ندارد."

به همین دلیل است که برای آزمون وجود رابطه تعادلی بلندمدت بین دو متغیر (یا چند متغیر) از تحلیل هم‌انباشتگی استفاده می‌شود.

۴. نمایش تصحیح خطای (EC) متغیرهای هم انباشته

وقتی صحبت از روابط متغیرها طی زمان یا پویایی است، می‌توان به عللی مثل کندی در تعدیل به دلیل هزینه‌های تعدیل، عدم تطبیق سریع انتظارات یا اشتباه در شکل‌گیری انتظارات و... بین رابطه بلندمدت و رابطه کوتاه‌مدت تفکیک قائل شد. مثلاً، در نظریه انتظارات تطبیقی [۲] هنگامی که فرض می‌شود تقاضای پول به نرخ بهره انتظاری به شکل $Y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u$ بستگی دارد (Y_t= تقاضای پول، x_t^* = نرخ بهره انتظاری) نحوه شکل‌گیری انتظارات به شکل زیر تصریح می‌شود:

$$x^*_t - x^*_{t-1} = \gamma (x_t - x^*_{t-1}) \quad (۱۲)$$

بدین ترتیب، چون رابطه تقاضا حاوی یک متغیر انتظاری است لذا، مستقیماً قابل تخمین نیست. اما با جایگذاری از رابطه (۱۲) می‌توان رابطه‌ای فقط حاوی کمیتهای قابل مشاهده به صورت زیر استخراج کرد:

1. Engle

۲. ر.ک.ب. همان منبع، ص ۳۱۶.

$$(۱۳) \quad Y_t = \gamma\beta_1 + \gamma\beta_2 x_t + (1 - \gamma)Y_{t-1} + V_t$$

این رابطه به دلیل بیان پویایی حرکت Y_t طی زمان (به علت حضور Y_{t-1}) یعنی، نسبت به دوره قبل تابع تقاضای پول کوتاه‌مدت نام دارد. در مقابل رابطه اولیه $Y_t = \beta_1 + \beta_2 x^*_t + u$ تابع تقاضای پول بلندمدت نام دارد. بدین‌ترتیب، به دلیل قابل مشاهده بودن کمیتها در رابطه (۱۳)، ابتدا رابطه کوتاه‌مدت برآورد می‌شود سپس، از ضریب Y_{t-1} کمیت γ به دست می‌آید و بعد، با تقسیم سایر عناصر معادله (۱۳) بر γ رابطه بلندمدت برآورد می‌گردد.

حال در رابطه با بحث هم‌انباشتگی هم، انجل و گرانجر (۱۹۸۷) ثابت کرده‌اند که تناظری مهم بین سیستمهای هم انباشته و فرآیندهایی به نام فرآیندهای تصحیح خطا[1] (EC) وجود دارد. بدین ترتیب، برای هر مجموعه متغیرهای انباشته رابطه کوتاه‌مدت موجود بین آنها را می‌توان به وسیله یک طریقه نمایش تصحیح خطا (EC) بیان داشت. عکس این قضیه هم صادق است یعنی، اگر یک رابطه به شکل تصحیح خطا بین متغیرهایی موجود باشد حتماً آنها هم انباشته هستند. این نتیجه، به قضیه *طریق نمایش گرانجر* (۱۹۸۲) معروف است. این رابطه کوتاه‌مدت به شکل زیر می‌باشد:

$$(۱۴) \quad \Delta x_t = \Delta y_t + \gamma\,(x - by)_{t-1} + V_t$$

توجه شود که اگر x_t و y_t هر یک $I(1)$ و طبق رابطه $x_t = by_t + \varepsilon_t$ هم انباشته باشند، تمامی اجزاء (۱۴) کمیتهای $I(0)$ هستند. λ ضریب تعدیل است که بر مبنای آن خطای مرتکب شده تصحیح می‌شود پس، رابطه $x_t = by_t$ رابطه تعادلی بلندمدت، و معادله (۱۴) رابطه کوتاه‌مدت مربوطه می‌باشد و به این ترتیب، می‌توان به پویایی کوتاه‌مدت متغیرها از دوره‌ای به دوره دیگر پی‌برد. آن چه که حال بایستی بررسی شود نحوه تخمین روابط کوتاه و بلندمدت و آزمون وجود هم‌انباشتگی و دلالتهای آماری مربوطه است.

۵. تخمین بردار هم انباشتگی

در بالا نشان دادیم که لازمه یک رابطه تعادلی یا بلندمدت بین مجموعه‌ای از متغیرهای سری زمانی، وجود یک ترکیب خطی با خاصیت مانایی از متغیرها است. حال سؤال این است که آن

1. Error Correction

ترکیب خطی مورد نظر بین x و y را که I(۰) است چگونه می‌توان یافت. دو روش برای این منظور قابل طرح است. روش اول که قدیمی‌تر است روش دو مرحله‌ای انجل - گرانجر (EG) می‌باشد (۱۹۸۷). روش جدیدتر روش حداکثر راستنمایی منسوب به یوهانسن و یوسلیوس[1] (۱۹۹۰) است. در این مقاله روش دو مرحله‌ای انجل - گرانجر مورد بحث قرار می‌گیرد و تشریح روش یوهانسن و یوسلیوس به مقاله دیگر موکول می‌گردد.

روش دو مرحله‌ای انجل - گرانجر (همان طور که از اسم آن برمی‌آید) در دو مرحله اعمال می‌گردد:

(۱) ابتدا، رابطه بلندمدت مفروض (رگرسیون هم انباشتگی) یعنی، رابطه $x_t = by_t + \varepsilon_t$ به وسیله روش حداقل مربعات برآورد می‌شود. از باقیمانده‌های این رگرسیون می‌توان برای آزمون وجود هم‌انباشتگی استفاده کرد. دلیل این که چرا به همین سادگی می‌توان از روش OLS استفاده کرد بدین قرار است: اگر متغیرها در رابطه بلندمدت هرکدام I(۱) باشند آنگاه هر ترکیب خطی از آنها، به جز آن ترکیب که هم‌انباشتگی طبق آن وجود دارد، I(۱) خواهد بود و واریانس ترکیب فوق با $t \to \infty$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. تنها ترکیب هم‌انباشتگی است که I(۰) بوده و واریانس محدود خواهد داشت. حال از آنجایی که تخمین زن حداقل مربعات، بردار پارامتری را انتخاب می‌کند که واریانس باقیمانده‌ها را حداقل می‌سازد (لذا واریانس محدود را پیدا می‌کند) پس، به راحتی می‌توان بردار هم‌انباشتگی را پیدا کرد.

(۲) مشروط به وجود هم‌انباشتگی (که در قسمت بعد آزمون آن را بیان می‌داریم)، تخمین b از این مرحله را در معادله (۱۴) قرار داده و سایر پارامترهای رابطه کوتاه‌مدت (EC) را به شکل سازگار با روش حداقل مربعات معمولی (OLS) تخمین می‌زنیم. به عبارت دیگر، با به دست آوردن b از تخمین OLS رابطه $x_t = by_t + \varepsilon_t$ آن را به جای b در جمله تصحیح خطای $(x_t - by_t)$ در معادله (۱۴) قرار می‌دهیم (یا آن که می‌توان از باقیمانده‌های رابطه بلندمدت به جای عبارت فوق استفاده کرد.)

به این ترتیب، هم رابطه بلندمدت و هم رابطه کوتاه‌مدت تصحیح خطای بیانگر تعدیل دوره به

1. Johansen - Juselius

دوره متغیرها، برآورد می‌شود. در طی این فرایند چند نکته مهم وجود دارد:

۱- وقتی متغیرها هم‌انباشته باشند، تخمینهای پارامترهای تعادلی بلندمدت سازگار و در سطح بالایی کارا هستند. در واقع، این تخمین‌ها "ابر سازگار"[1] هستند و حتی، سریعتر از تخمینهای استاندارد معمول OLS بر طبق احتمال به مقادیر حقیقی پارامترها همگرا خواهند بود. این نکته بسیار مهم است زیرا، طبق تحلیل همبستگی جعلی فریش اگر متغیرهای رگرسیون مانا نباشند، نتایج آماره‌ها تو رشدارند بدین معنا که به طور جعلی دلالت بر وجود رابطه خواهند داشت اما، حالا اگر متغیرها علی‌رغم نامانا بودن، هم انباشته باشند حتی، خواص مطلوبتری حاصل می‌شود و اتهام جعلی بودن رابطه رخت برمی‌بندد.

۲- این خاصیت سازگاری نیازی به عدم همبستگی بین متغیرهای سمت راست و جزء خطا ندارد (برخلاف رگرسیونهای معمول).

۳- تخمینهای پارامترهای کوتاه‌مدت؛ نه تنها سازگار بلکه به همان اندازه کارای مجانبی هستند که اگر مقادیر حقیقی بردار هم‌انباشتگی را می‌داشتیم.

۶. آزمون هم‌انباشتگی

حال سؤال این است که اصلاً چگونه می‌توان فهمید دو متغیر که $I(1)$ می‌باشند، هم انباشته هستند یا خیر؟ دیدیم رابطه تعادلی بلندمدت به شکل:

$$x_t = by_t + \varepsilon_t$$

بود. گیریم ε_t باقیمانده‌های حاصل از برازش این رگرسیون باشد. حال می‌توان از این باقیمانده‌ها برای آزمون فرضیه $\delta = 1$ در رابطه:

$$\varepsilon_t = \delta\varepsilon_{t-1} + u_t \quad (15)$$

استفاده کرد که u_t جمله اخلال خالص است. اگر x_t و y_t هم‌انباشته باشند باید ε_t کمیت $I(0)$ باشد اما، اگر $\delta = 1$ باشد آنگاه ε_t کمیتی $I(1)$ خواهد بود چراکه تفاضل ε_t مانا می‌شود. پس فرضیه H_0 عبارت است از عدم هم‌انباشتگی x_t و y_t. تلاش ما در رد این فرضیه و لذا یافتن هم‌انباشتگی

1. Super Consistent

است یعنی، این که $\varepsilon_t \sim I(0)$ باشد و این در صورتی حاصل می‌شود که $\delta < 1$ باشد.

انجل و گرانجر (۱۹۸۷) همراه با ۷ آزمونی که مطرح کرده‌اند، شکل تعدیل یافته‌ای از این آزمون را پیش‌کشیده‌اند. این آزمون رگرسیون گسترش یافته دیکی - فولر (ADF) را به جای رابطه (۱۵) برآورد می‌کند. به شکل زیر:

$$(16) \quad \Delta\varepsilon_t = -\varphi\varepsilon_{t-1} + \Sigma\, \delta_i\, \Delta\varepsilon_{t-i}$$

توجه شود که در (۱۶) متغیر وابسته به شکل تفاضل مرتبه اول ظاهر شده است پس، ریشه واحد در (۱۵) یعنی $\delta = 1$ در (۱۵) به معنی $\varphi = 0$ در (۱۶) است.

بنابراین، از آماره t ضریب φ (τ_φ) جهت آزمون فرضیه عدم هم‌انباشتگی استفاده می‌شود. مقادیر بحرانی این آماره t در جدول II و III انجل -گرانجر (۱۹۸۷) آمده است (و در همین مقاله هم مجدداً چاپ شده است).

آزمون CRDW

یک آزمون بسیار راحت که اغلب محققین به طور حاضر و آماده از آن استفاده می‌کنند آزمون دوربن - واتسون رگرسیون هم‌انباشتگی[1] (CRDW) است. در اینجا، برای آزمون از آماره DW (دوربن - واتسون) رگرسیون هم‌انباشتگی استفاده می‌گردد سپس، مقدار عددی DW با جدول II یا III در انجل -گرانجر (۱۹۸۷) مقایسه می‌شود. تحت فرضیه H_0 یعنی، عدم هم‌انباشتگی، باید CRDW نزدیک صفر باشد. زیرا داریم:

$$DW = \frac{\Sigma\,(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})}{\Sigma\, \varepsilon_t}$$

حال اگر در رابطه $\varepsilon_t = \delta\varepsilon_{t-1} + u_t$ مقدار δ مساوی یک باشد (عدم وجود هم‌انباشتگی) دو مقدار ε_t و ε_{t-1} نزدیک هم بوده و لذا، $\Sigma\,(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$ نزدیک صفر خواهد بود پس، فرضیه H_0 مبنی بر عدم هم‌انباشتگی زمانی رد می‌شود که مقدار آماره DW از مقدار بحرانی جدول بزرگتر باشد.

1. Cointegrating Regression Durbin - Watson Test

۷. نقاط قوت و ضعف تحلیل هم‌انباشتگی

الف - مزایای استفاده از تکنیک هم‌انباشتگی

(۱) نظریه اقتصادی بر رابطه تعادلی بلندمدت بین متغیرها اشاره دارد اما، راجع به فرآیند تعدیل مربوطه چیز زیادی نمی‌گوید. اگر رابطه تعادلی فرض شده وجود داشته باشد آنگاه بایستی متغیرهای تصریح شده در رابطه هم‌انباشته باشند. بنابراین، آزمون وجود هم‌انباشتگی در واقع، آزمون وجود رابطه تعادلی مفروض و لذا، درستی مدل تصریح شده است.

(۲) اگر برای مجموعه‌ای از متغیرها بردار هم‌انباشتگی وجود نداشته باشد می‌توان به دنبال مجموعه وسیعتری از سریهای هم‌انباشته بود پس، این تکنیک یک آزمون خطای تصریح[1] یا گزینش متغیر[2] است.

(۳) یک بردار هم‌انباشتگی، تخمینهای بسیار سازگاری از بردار تعادلی بلندمدت را به طور مستقیم به دست می‌دهد. این تخمینها بدون نیاز به هیچ فرضی، راجع به پویایی در مکانیزم تولید داده‌ها، دارای خواص مطلوبی هستند. همچنین، می‌توان به تحلیل هم‌انباشتگی به عنوان ابزاری ساده در طراحی مدل نگریست. به این ترتیب، به صورت مجرد از ساختار پویای کوتاه‌مدت، تحلیل تخمین خواص بلندمدت تعادلی مدلها امکان‌پذیر است. نظریه زیربنای تحلیل هم‌انباشتگی حذف پویایی کوتاه‌مدت در تخمین پارامترهای بلندمدت را توجیه می‌کند. این بر خلاف سایر نظریه‌های پویا مثل انتظارات تطبیقی، تبدیل جزئی و امثال آن است، چراکه در آنها تخمین رابطه بلندمدت تنها از کانال تخمین رابطه کوتاه‌مدت امکان‌پذیر است.

(۴) استنتاج آماری "کلاسیک" تنها در مدلهایی معتبر است که کلیه متغیرها مانا باشند اما، بیشتر سریهای زمانی اقتصادی مانا نیستند و بدین‌ترتیب، مدلهای حاوی متغیرهایی که $I(0)$ نیستند، به شکل غلطی تصریح شده‌اند (حداقل از نظر آماری). یک راه حل تفاضل‌گیری از سریهاست تا زمانی که مانایی حاصل بشود و سپس، رگرسیون را روی این متغیرهای تفاضل گرفته شده انجام دهیم اما، در این حالت حصول کفایت آماری به قیمت از دست دادن اطلاع بلندمدت حاصل می‌شود. به عنوان مثال، اگر رابطه بلندمدت به صورت $x_t = a + by_t$ باشد آنگاه با

1. Mis-specification test   2. Variable Selection

تفاضل‌گیری داریم: $\Delta x_t = b\Delta y_t$ و لذا، اطلاعات راجع به a از دست می‌رود اما، رهیافت هم‌انباشتگی محقق را مجاز می‌دارد که:

الف - معادله‌ای را تصریح کند که در آن تمام جملات مانا بوده و لذا، امکان استنتاج آماری کلاسیک فراهم شود،

ب - اطلاعات راجع به رابطه بلندمدت بین سطوح متغیرها که در بردار هم انباشتگی (مانا) وجود دارد، حفظ گردد. این بردار شامل پارامترهای رابطه تعادلی بلندمدت است، و در تناظر با پارامترهای جمله تصحیح خطا در رگرسیون مرحله دوم می‌باشد.

ب - نقاط ضعف و محدودیتهای تحلیل هم‌انباشتگی

مزایای تحلیلی هم‌انباشتگی را باید همراه با محدودیتهای آن در نظر گرفت. مهمترین محدودیتهای این تحلیل عبارتند از:

۱) تحت شرایط خاص، برخی از فرایندهای آزمون ذکر شده (مثل آزمون ADF یا دیکی - فولر گسترش یافته) دارای توان[1] بسیار پایینی هستند. بهمین جهت است که روشهای جدیدی، در این رابطه، مثل روش حداکثر راستنمایی یوهانس ابداع شده‌اند تا از توزیعهای دقیق آماره‌های آنها استفاده شود.

۲) ممکن است رگرسیونهای هم‌انباشتگی ایستای حداقل مربعات، تورش قابل ملاحظه‌ای در نمونه‌های کوچک داشته باشند.

۳) نقش تحلیل هم‌انباشتگی در ارزیابی مدل ذاتاً محدود است. فایده آن در فراهم آوردن اطلاعات بلندمدت است. ساختار پویای مدل را نمی‌توان بدون استفاده از سایر تکنیکها ارزیابی کرد.

۴) شکستگیهای ساختاری[2] در سریهای زمانی می‌توانند مشکلاتی را در استنتاج موجب شود. هم‌انباشته بودن متغیرها تضمین ثبات پارامتر در کل نمونه نیست به علاوه، شکستگیهای ساختاری می‌تواند درجه ظاهری هم‌انباشتگی سریهای زمانی را تغییر دهد، به‌گونه‌ای که سری که $I(0)$ است

1. Power
2. Structural Break

با شکستگی ساختاری، $I(1)$ به نظر می‌رسد.

۸. یک بحث جانبی: حذف روند از سریهای زمانی اقتصادی

آزمون برای ریشه واحد به یک مسئله بسیار مرتبط، نزدیک است. همان طور که می‌دانیم نمی‌توان تکنیکهای رگرسیون کلاسیک را برای عناصر غیرمانا به کار برد زیرا، اساساً استنتاج کلاسیک، منحصراً، برای فرایندهای مانا به کار می‌رود. بنابراین، معقول است که قبل از تخمین و آزمون، نامانایی را بر طرف کرد. دو رهیافت برای انجام این کار وجود دارد:

(۱) گرفتن تفاضل از سریها برای حصول مانایی

(۲) حذف روند قطعی با رگرسیون بر یک عنصر روند و کار با باقیمانده. برای ملاحظه این امر که تحت چه شرایطی هر یک از دو رهیافت بالا مناسب است، لازم است که فرآیندهای سری زمانی تفاضل - مانا[1] (DS) و روند - مانا[2] (TS) را تعریف کنیم.

مدل زیر مفروض است: $Z_t = \mu + aZ_{t-1} + \gamma t + u_t$

یک فرآیند روند - مانا است اگر $|a| < 1$ و $\gamma \neq 0$ باشد و تفاضل مانا است اگر $\partial = 1$ و $\gamma = 0$ باشد.

برای یک فرآیند روند-مانا می‌توان روند خطی قطعی را با رهیافت (۲) حذف کرد. سری حاصله مانا خواهد بود. اما، یک روند می‌تواند استوکاستیک بوده و قطعی نباشد که بایستی روند را با تفاضل‌گیری حذف کرد.

از رهیافت (۲) در روند زدایی کردن، در تحلیل اقتصادسنجی بسیار استفاده شده است اما، این تنها در صورتی معتبر است که مدل روند - مانا بوده باشد. در غیر این صورت، استفاده از روند در یک رگرسیون منجر به خطای تصریح مدل می‌شود که تخمین و آزمون را غیر معتبر می‌سازد. و در واقع، نلسون و پلوسر (۱۹۸۲) نشان داده‌اند که سریهای اقتصادی کلان اندکی وجود دارند که فرایندهای روند - مانا هستند.

از سوی دیگر، رهیافت (۱) (تفاضل‌گیری سریهای $I(1)$) از نظر آماری برای فرآیندهای

1. Differece-Stationary
2. Trend-Stationary

تفاضل - مانا مناسب است اما، در تفاضل‌گیری مرتبه اول اطلاعاتی از دست می‌رود (ر.ک.ب. بخش قبل) که از نظر اقتصادی نامطلوب است. اما، تکنیک هم‌انباشتگی راهی برای گریز از این معضل فراهم می‌آورد. این تکنیک اجازه می‌دهد که عناصر در سطح خود باقیمانده و مطابق ترکیب خطی هم‌انباشتگی رگرس شوند.

۹. خلاصه بحث تا بدین جا

الف - در قدم اول بایستی از انباشتگی متغیرهای موردنظر اطمینان یافت. این امر معمولاً با استفاده از بررسی نمودار همبستگی و یا آزمون ریشه واحد، با استفاده از جداول دیکی - فولر یادیکی - فولر گسترش یافته صورت می‌گیرد.

در رابطه با آزمون ریشه واحد برای یکسری زمانی نوعی رگرسیون دیکی - فولر گسترش یافته (ADF) عبارت است از:

$$\Delta x_t = a + \delta t + \gamma x_{t-1} + \Sigma \lambda_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

که m به گونه‌ای انتخاب می‌شود که باقیمانده‌های اخلال خالص در رگرسیون بالا حاصل شوند. (ر.ک.ب پاورقی فرمول (۷)) دلیل این امر آن است که کیفیت استنتاج از آزمونها مشروط به فقدان الگوهای سیستماتیک در اجزاء خطا است. بنابراین، گرچه می‌توان بدون وجود عناصر با وقفه Δx_t رگرسیون را انجام داد ولی، مسیر مرجح در آزمون مانایی آن است که آنقدر از چنین عناصر با وقفه استفاده شود تا همبستگی سریالی از باقیمانده حذف گردد.

دلیل وجود عنصر روند (t) نیز واضح است (ر.ک.ب. به بخش ۱)

توجه شود که در تمام آزمونهای مورد استفاده در رابطه با رگرسیون دیکی - فولر فرضیه H_0 مانایی مدل در شکل تفاضل مرتبه اول و فرضیه H_1مانایی در شکل سطوح[1] متغیرها است.

در اینجا چندین نوع آزمون می‌توان انجام داد:

آزمون ۱. فرضیه $H_0 : \gamma = 0$ $(H_1 : \gamma < 0)$

تابع آزمون برای این فرضیه همان نسبت t برای γ است که دیکی فولر با t نشان داده‌اند.

1. Levels

دیکی فولر مقادیر بحرانی این تابع آزمون را برای تعداد مشاهدات n=۲۵ به صورت زیر محاسبه کرده‌اند:

جدول ۱. مقادیر بحرانی در سطح

٪۱۰	٪۵	٪۱
-۳/۲۴	-۳/۶	-۴/۳۸

دلیل منفی بودن مقادیر، شکل یک دنباله فرضیه H_0 است.

آزمون ۲. فرضیه H_0 عبارت است از $\alpha = \delta = \gamma = 0$

تابع آزمون در این حالت مقدار F محاسباتی با اعمال قیود فوق می‌باشد که دیکی فولر آن را ϕ_2 نامیده‌اند، بدیهی است اگر ϕ_2 بزرگتر از مقدار بحرانی باشد، فرضیه H_0 رد می‌شود. دیکی فولر مقادیر بحرانی این تابع آزمون را برای تعداد مشاهدات n = ۲۵ به صورت زیر محاسبه کرده‌اند:

جدول ۲. مقادیر بحرانی در سطح

٪۱۰	٪۵	٪۱
۴/۶۷	۵/۶۸	۸/۲۱

آزمون ۳. فرضیه H_0 عبارت است از $\delta = \gamma = 0$

تابع آزمون در این حالت مقدار F محاسباتی با اعمال قیود فوق می‌باشد که دیکی فولر آن را ϕ_3 نامیده‌اند، بدیهی است اگر ϕ_3 بزرگتر از مقدار بحرانی باشد، فرضیه H_0 رد می‌شود. دیکی فولر مقادیر بحرانی این تابع آزمون را برای تعداد مشاهدات n=۲۵ به صورت زیر محاسبه کرده‌اند:

جدول ۳. مقادیر بحرانی در سطح

٪۱	٪۵	٪۱۰
۱۰/۶۱	۷/۲۴	۵/۹۱

قبلاً راجع به آزمونهای ۱ و ۳ بحث گردید. آزمون ۲ حالت میانه‌ای از آن دو است.

خلاصه این که، در تمام این موارد اگر به دنبال یافتن هم‌انباشتگی باشیم باید فرضیه H_0 را نتوانیم رد کنیم تا در درجه اول انباشته بودن متغیرها تسجیل گردد. این آزمون باید برای هر دو متغیرهای x و y صورت گرفته و برای هر دو باید فرضیه H_0 رد نگردد.

ب - پس از آنکه آزمون ریشه واحد روی x و y انجام شد و H_0 رد نگردید یعنی، نتوانستیم فرضیه ریشه واحد داشتن آنها را رد کنیم (تا اینجا اثبات انباشتگی است) می‌توان استنتاج کرد که x و y هر دو $I(1)$ هستند زیرا، فرضیه مقابل H_0 با توجه به تفاضل مرتبه اول x و y بوده که نتیجه آزمون به نفع آن تمام شده است.

حالا باید رگرسیون هم‌انباشتگی را برای آزمون هم‌انباشتگی انجام داد یعنی، باید y را روی x رگرس کرد. سپس آزمون دیکی فولر روی باقیمانده‌های این رگرسیون انجام می‌شود.

در این حالت همان طور که بیان گردید مدل مورد نظر برای آزمون عبارت است از:

$$\Delta\varepsilon_t = -\varphi\varepsilon_{t-1} + \Sigma\, \delta_i\, \Delta\, \varepsilon_{t-i}$$

مقادیر باقیمانده رگرسیون هم‌انباشتگی در زمان t است.

سپس، آماره t را برای ضریب تخمینی ε_{t-1} بررسی می‌کنیم. این کمیت توسط انجل -گرانجر τ_ϕ نامیده شده است که توسط خود آنها مقادیر بحرانی فراهم شده است. مقادیر بحرانی این آماره برای ۱۰۰ مشاهده عبارت است از:

جدول ۴. مقادیر بحرانی برای ۱۰۰ مشاهده

٪۱	٪۵	٪۱۰
۳/۷۷	۳/۱۷	۲/۸۴

پس، به طور خلاصه، مقدار آماره t را با مقادیر بحرانی فوق مقایسه می‌کنیم. باید توجه شود که در این جا فرضیه H_0 عدم وجود هم‌انباشتگی و فرضیه H_1 وجود هم‌انباشتگی است پس، برای اثبات هم‌انباشتگی باید مقدار محاسباتی τ_ϕ از مقادیر بحرانی فوق بیشتر شود. دلیل این امر آن است که ما می‌خواهیم ثابت کنیم ε_t از رگرسیون هم‌انباشتگی مانا است که علت آن می‌تواند منسوب به وجود رابطه خطی هم‌انباشتگی بین دو متغیر باشد. پس، برای اثبات هم‌انباشتگی باید فرضیه H_0 در قسمت الف، رد شده ولی، در قسمت ب رد نشود. بعد از دیکی - فولر محققین دیگری مقادیر بحرانی دقیقتری را به دست داده‌اند که امروزه به شکل آماره در نرم‌افزارها محاسبه می‌شود. مثلاً، مقادیر بحرانی مک کینون[1] در نرم‌افزار TSP به همراه سایر نتایج گزارش می‌شود در بخش بعد جداول مک کینون هم گزارش شده‌اند.

پس از اثبات وجود هم‌انباشتگی می‌توان شکل تصحیح خطای رفتار کوتاه‌مدت متغیرها را نوشته و پارامترهای آن را هم تخمین زد (با روش OLS). دیدیم این شکل عبارت است از:

$$\Delta x_t = a\Delta y_t + \gamma (x - \beta y)_{t-1} + V_t$$

حال می‌توان به جای $y - bx$ عناصر باقیمانده‌های رگرسیون هم‌انباشتگی را قرار داده و سپس ضرایب a و λ را با روش حداقل مربعات تخمین زد.

۱۰. آزمون هم‌انباشتگی مصرف و درآمد برای اقتصاد ایران

به عنوان مثال، در رابطه با بحث هم‌انباشتگی، با استفاده از داده‌های سالهای ۱۳۳۸ تا ۱۳۷۵[2] آزمون هم‌انباشتگی برای متغیرهای مصرف خصوصی و درآمد ملی هر دو به قیمتهای ثابت صورت گرفت.

سری ارقام این دو متغیر عبارتند از:

---

1. Mackinnon

۲. مجموعه اطلاعاتی (سری زمانی آمار حسابهای ملی، پولی و مالی)، مرکز مدارک اقتصادی - اجتماعی و انتشارات، سازمان برنامه و بودجه، ۱۳۷۶.

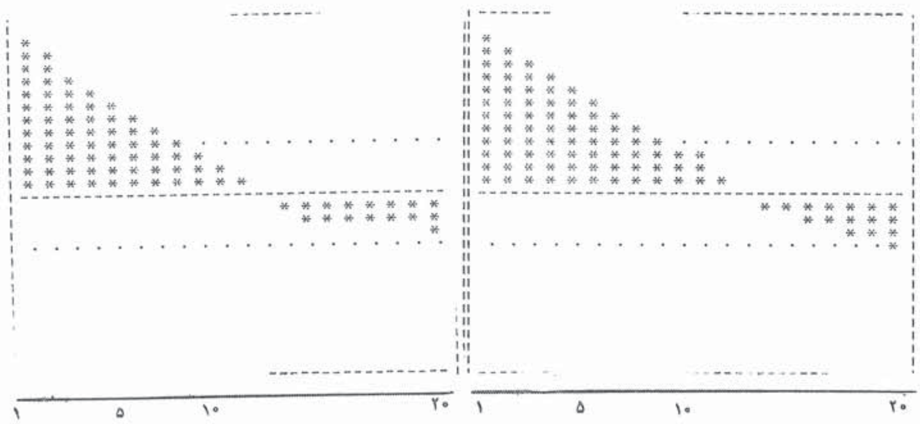
سال	مصرف خصوصی	درآمد ملی
۱۳۳۸	۱۵۰۴/۰۰۰	۱۵۱۴/۸۰۰
۱۳۳۹	۱۴۸۴/۴۰۰	۱۶۴۳/۹۰۰
۱۳۴۰	۱۴۹۰/۲۰۰	۱۶۸۱/۲۰۰
۱۳۴۱	۱۵۲۱/۲۰۰	۱۸۳۳/۶۰۰
۱۳۴۲	۱۵۳۸/۷۰۰	۱۹۷۸/۲۰۰
۱۳۴۳	۱۴۸۶/۶۰۰	۱۹۸۸/۷۰۰
۱۳۴۴	۱۵۵۵/۱۰۰	۲۱۵۹/۶۰۰
۱۳۴۵	۱۶۸۳/۳۰۰	۲۳۳۹/۱۰۰
۱۳۴۶	۱۸۵۲/۰۰۰	۲۶۷۹/۹۰۰
۱۳۴۷	۱۸۶۹/۱۰۰	۲۶۲۶/۴۰۰
۱۳۴۸	۲۰۱۹/۶۰۰	۲۸۱۰/۳۰۰
۱۳۴۹	۲۲۴۸/۰۰۰	۳۰۶۴/۸۰۰
۱۳۵۰	۲۵۷۴/۵۰۰	۴۰۵۸/۱۰۰
۱۳۵۱	۲۷۴۸/۷۰۰	۴۹۶۲/۰۰۰
۱۳۵۲	۳۱۲۶/۹۰۰	۷۰۶۳/۸۰۰
۱۳۵۳	۳۷۹۲/۹۰۰	۸۹۲۶/۸۰۰
۱۳۵۴	۴۹۸۶/۷۰۰	۸۷۳۴/۷۰۰
۱۳۵۵	۴۹۶۹/۶۰۰	۱۰۷۱۰/۱۰
۱۳۵۶	۵۳۲۲/۶۰۰	۱۰۵۴۶/۹۰
۱۳۵۷	۵۴۳۰/۵۰۰	۹۰۰۲/۳۰۰
۱۳۵۸	۵۶۱۵/۱۰۰	۹۵۴۶/۵۰۰
۱۳۵۹	۵۳۶۰/۱۰۰	۸۴۶۴/۵۰۰

ادامه جدول

سال	مصرف خصوصی	درآمد ملی
۱۳۶۰	۵۵۳۳/۳۰۰	۸۱۸۰/۵۰۰
۱۳۶۱	۵۹۴۳/۳۰۰	۹۳۱۱/۷۰۰
۱۳۶۲	۶۸۰۳/۷۰۰	۱۰۶۱۸/۰۰
۱۳۶۳	۷۱۷۰/۳۰۰	۱۰۶۱۱/۳۰
۱۳۶۴	۷۲۹۰/۶۰۰	۱۰۵۸۱/۸۰
۱۳۶۵	۶۵۴۳/۷۰۰	۸۶۷۲/۲۰۰
۱۳۶۶	۶۱۴۱/۳۰۰	۸۸۰۸/۸۰۰
۱۳۶۷	۶۱۷۱/۸۰۰	۸۱۷۷/۴۰۰
۱۳۶۸	۶۳۲۷/۱۰۰	۸۴۹۳/۴۰۰
۱۳۶۹	۷۵۶۳/۵۰۰	۹۶۶۵/۷۰۰
۱۳۷۰	۸۲۸۱/۵۰۰	۱۱۰۱۰/۱۰
۱۳۷۱	۸۷۲۵/۳۰۰	۱۱۵۶۳/۱۰
۱۳۷۲	۸۹۲۸/۰۰۰	۱۱۸۹۳/۵۰
۱۳۷۳	۹۱۲۳/۸۰۰	۱۱۷۰۰/۷۰
۱۳۷۴	۹۳۵۱/۹۰۰	۱۲۱۹۹/۶۰
۱۳۷۵*	۹۶۴۴/۳۰۰	۱۲۹۴۸/۱۰

* برآورد مقدماتی است.

برای آزمون هم‌انباشتگی همان طور که بیان گردید اول باید انباشتگی متغیرهای مصرف و درآمد را آزمون کرد، متغیر x نمایانگر مصرف و y معرف درآمد است. نمودارهای خود این متغیرها و نیز نمودار همبستگی این متغیرها در زیر آمده است:



ضرایب خود همبستگی برای متغیر X ضرایب خود همبستگی برای متغیر Y

می‌توان برای گرفتن ایده از نمودار ضرایب همبستگی استفاده نمود (برای ملاحظه طریقه محاسبه آنها ر.ک.ب بخش ۱)

اما همان طور که بیان گردید برای گرفتن جواب قاطع از آزمون دیکی فولر استفاده می‌کنیم. برای متغیر y_t با واردکردن دو عنصر با وقفه از تفاضل y جهت از بین بردن الگوی سیستماتیک از اجزاء اخلال، نتیجه رگرسیون دیکی فولر گسترش یافته عبارتند از:

$$\Delta y_t = ۳۳۶/۲ + ۷۳/۹t - ۰/۲۳۴y_{t-۱} + ۰/۲۸۴۴\Delta y_{t-۱} + ۰/۲۲۷\Delta y_{t-۲}$$

مقدار τ عبارت است از

$$t = -۲/۴۰۷$$

می‌توان از مقادیری مشابه جداول بحرانی دیکی - فولر که در بخش قبل ارائه شد برای آزمون استفاده کرد. همان طور که در بخش قبل بیان شد اخیراً مک کینون نیز مقادیر بحرانی دقیقتری را ارائه کرده است.

مقادیر بحرانی مک کینون در سطوح مختلف عبارتند از:

جدول ۵. مقادیر بحرانی مک‌کینون در سطوح مختلف

٪۱۰	٪۵	٪۱
-۳/۱۶	-۳/۵۱	-۴/۲۲

که ملاحظه می‌شود با مقادیر بحرانی دیکی فولر جدول ۱ تفاوت زیادی ندارند.

با مقایسه مقدار محاسباتی t برای ضریب y_{t-1} معادل t=-۲/۴۰۷ و مقادیر بحرانی دیکی فولر (جدول ۱) یا مقادیر بحرانی مک کینون در جدول ۵ فرضیه ریشه واحد داشتن y رد نمی‌شود.

برای متغیر x رگرسیون دیکی - فولر گسترش یافته عبارت است از:

$$\Delta x_t = -۴۰/۰۹ + ۹۱/۵۳t - ۰/۳۶۶۸x_{t-1} + ۰/۴۸۷\Delta x_{t-1} + ۰/۱۵۹\Delta x_{t-2}$$

مقدار t ضریب x_{t-1} عبارت است از t=-۳/۵۰۷، با مقایسه این مقدار با جدول مشابه جدول ۱ (مقادیر بحرانی دیکی-فولر) یا جدول ۵ (مقادیر بحران مک کینون) فرضیه ریشه واحد داشتن x نیز در سطح معنادار بودن ۵٪ رد نمی‌شود.

پس، حال می‌توان به آزمون هم‌انباشتگی پرداخت. تخمین رگرسیون هم‌انباشتگی با عرض از مبدأ عبارت است از:

$$\hat{x} = ۱۶/۶ + ۰/۶۷y \qquad R^2 = ۰/۸۹$$

$$t = (۰/۰۵)\ (۱۷/۸۵) \qquad CRWD = ۰/۳۱۱$$

$$F = ۳۱۸$$

حال مقادیر باقیمانده‌های رگرسیون فوق را به دست آورده و یک رگرسیون دیکی - فولر گسترش یافته مطابق معادله (۱۶) را بر آنها برازش می‌کنیم. m یعنی، تعداد عناصر با وقفه تفاضل اجزاء باقیمانده برای رفع مشکلات خود همبستگی و امثال آن معادل ۲ انتخاب گردید. نتیجه برازش به قرار زیر می‌باشد:

$$\Delta\varepsilon_t = -۰/۱۰۴\varepsilon_{t-1} - ۰/۲۱۲۹\Delta\varepsilon_{t-1} - ۰/۰۴۸\Delta\varepsilon_{t-2}$$

پس مقدار t عبارت است از ۰/۹۸۸- مقادیر بحرانی مک کینون عبارتند از:

جدول ۶. مقادیر بحرانی مک کینون

٪۱۰	٪۵	٪۱
-۳/۱۶	-۳/۵۱	-۴/۲۲

همچنین، می‌توان از جدول ۴ مربوط به انجل - گرانجر استفاده کرد. عیب جداول انجل - گرانجر این است که برای تعداد مشاهدات ۱۰۰ گزارش شده‌اند. عیب جدول دیکی - فولر نیز، این است که برای تعداد مشاهدات ۲۵ گزارش شده‌اند. اما، مثلاً نرم‌افزار TSP مقادیر بحرانی مک کینون را برای هر مقدار لازم مشاهدات ارائه می‌کند (این خصوصیات برای هر نرم‌افزار دیگری صادق است).

در هر صورت با مقایسه t با جدول ۴ یا جدول ۶ نتیجه می‌شود که فرضیه H۰ یعنی، عدم وجود هم‌انباشتگی، رد نمی‌شود.

دیدیم راه ساده دیگر آزمون وجود هم‌انباشتگی استفاده از آماره d دوربن - واتسون رگرسیون هم‌انباشتگی است. مقادیر بحرانی این DW توسط انجل گرانجر (۱۹۷) به شکل زیر فراهم آمده است:

جدول ۷. مقادیر بحرانی DW

٪۱۰	٪۵	٪۱
۰/۲۰۹	۰/۲۸۲	۰/۴۵۵

با مقایسه CRDW با این مقادیر بحرانی ملاحظه می‌شود مقدار CRDW در سطح ۱٪ معنادار نیست یعنی، در این سطح معنادار بودن باقیمانده‌های رگرسیون هم‌انباشتگی دارای ریشه واحد هستند و لذا، باز هم وجود هم‌انباشتگی نفی می‌شود. (البته میزان CRDW نزدیک به نقطه بحرانی سطح ۵٪ است)

پس به طور خلاصه، برای مصرف و درآمد اقتصاد ایران طی سالهای ۱۳۳۸ تا ۱۳۷۲ وجود

هم‌انباشتگی و لذا، رابطه بلندمدت تأیید نمی‌گردد.

۱۱. خلاصه و نتیجه گیری

تحلیل هم انباشتگی که اول بار به وسیله گرانجر (۱۹۸۱) و انجل و گرانجر (۱۹۸۷) مطرح گردید، خاصیتی آماری است که می‌تواند رفتار بلندمدت سری‌های زمانی اقتصادی را توصیف کند. این مبحث موضوعات کاملاً متنوعی را بهم ربط می‌دهد: اول آن که، مفهوم اقتصادی رابطه بلندمدت بین متغیرهای اقتصادی را به یک مدل آماری حاوی آن متغیرها وصل می‌کند. همان طور که ملاحظه شد هنگامی که بین متغیرهای اقتصادی مربوطه یک رابطه بلندمدت وجود داشته باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که متغیرهای فوق "هم انباشته" هستند. دوم آنکه، امروزه با ادبیات وسیعی در رابطه با مبحث "فرایندهای با ریشه واحد" مواجه هستیم حال در اینجا نشان دادیم که این فرایندهای با ریشه واحد مبنایی برای استنتاج آماری راجع به وجود هم‌انباشتگی فراهم می‌کند. سوم آن که، دیرزمانی است که مدلهای تصحیح خطا (ECM) در "ادبیات" اقتصادی برای توصیف روابط کوتاه‌مدت بین متغیرهای اقتصادی مطرح شده‌اند. نشان داده می‌شود که هم‌انباشتگی بر وجود یک رابطه تصحیح خطا (ECM) بین متغیرهای مربوطه دلالت دارد و برعکس. همان طور که بیان گردید، این طریقه نمایش روابط بین متغیرهای اقتصادی از دیرباز مطرح شده بودند اما، حالا بحث هم انباشتگی مبنای اقتصادی و آماری بهتری برای این مدلها معرفی می‌کند. چهارم آن که، در مباحث پویای سری زمانی دو نوع رابطه بلندمدت و کوتاه‌مدت بین متغیرهای اقتصادی از هم تمیز داده می‌شود. (مثل مدلهای انتظارات تطبیقی یا تعدیل جزئی) حالا با استفاده از همین رابطه متقابل بین روابط تعادلی بلندمدت و مدلهای تصحیح خطا (ECM)، اطلاعات مفید کوتاه و بلندمدت برای مدلسازی داده‌ها در هم ادغام می‌شوندو پنجم آن که، همان طور که در ابتدا بیان شد، از دیرباز مسائل "رگرسیون جعلی" و "همبستگی فاقد مفهوم" مربوط به داده‌های سری زمانی جایگاه ویژه‌ای در مباحث اقتصادسنجی داشته‌اند. راگنار فریش[1] (۱۹۳۲) با بی‌باکی مختص خود می‌گوید که به نظر وی بسیاری از تحلیلهای رگرسیونی و همبستگی به همین دلیل فاقد مفهوم است.

1. Rangar Frisch

حال در مبحث هم‌انباشتگی، ثابت می‌شود که اگر متغیرهای اقتصادی مربوطه هم‌انباشته باشند، آنگاه بسیاری از آن رگرسیونهایی که جعلی تلقی می‌شده‌اند اعتبار خود را باز می‌یابند.

پس بحث هم‌انباشتگی حاصل انباشت اطلاعات در زمینه‌های گوناگون است و همین امر درک آن را مشکل‌تر می‌سازد. از سوی دیگر ظهور این مبحث راه را برای بررسی بسیاری مسایل دیگر نظیر برونزایی، تغییر ساختاری و... بازکرده است و هم اکنون به شدت روی کاربردهای آن تحقیق می‌شود.

منابع فارسی

۱. دیک ویتینک *کاربرد تحلیل رگرسیونی*. ترجمه ابریشمی، حمید و محمدی، تیمور. دانشگاه تهران، (۱۳۷۵)

۲. هاشم پسران، ری سی فیر، *اقتصاد سنجی*، ترجمه محمدی، تیمور. دانشگاه امام حسین (ع) (۱۳۷۴)

۳. الیور بلنچارد، استانلی فیشر، *درسهایی در اقتصاد کلان*، ترجمه محمود ختایی و تیمور محمدی، سازمان برنامه و بودجه، ۱۳۷۶.

منابع انگلیسی

1. Dickey, D.A. and Fuller, W.F. (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressi ve Time series with a Unit Root", *Journal of the American statistical Association,* Vol. 74

2. Dickey, D.A. and Fuller, W.F. (1981), "The Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time seris with a Unit Root", *Econometrica,* Vol. 49.

3. Dolado, J. J., Jenkinson, T. and Sosvilla - Rivera,S (1990)," Conintegration and Unit Roots: A survey", *Journal of Economic Surveys,* Vol. 4, No. 3.

4. "Econometric Modelling with Cointegrated Variables", Special Issue, *Oxford Bulletin*

of Economics and statistics (1976), Vol. 48, No. 3.

5. Engle, R.F. and Granger, C.W.(1987), "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica,* Vol. 55.

6. Frisch, R. 1934, *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems.* Oslo: University Institure of Economics.

7. Granger, C.W.J. (1981) "Some properties of time series Data and their use in Econometric Model Specification", *Journal of Econometrics,* 16,1, 121-130.

8. Granger, C.W.J., and p. Newbold (1977). *Forcasting Economic time Series,* New York Academic press.

9. Hall, S.G. and Henry, S.G.B (1988), *Macroeconomic Modelling,* North Holland, Amsterdam.

10. Harvey, A.C. (1981), *Time Series Analysis,* Philip Alan. Oxford.

11. Johansen, S. and Juselius, K (1990), "Maximum Likelihood Estimation and Inference on cointegration - with Application to the Demand for money", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics,* Vol. 52, No.2.

12. Mackinnon, J.G. (1991). "Critical values for cointegration tests," Chapter 13 in *Long-run Economic relationships: Readings in Cointegration,* eds.R.F.Engle and C.W.J. Granger, Oxford University press.

13. Nelson, C.R. and plosser, C.I. (1982), "Trends and random walks in Macroeconomic time series", *Journal of Monetary Economics,* Vol. 10.

14. Perman, R. (1991) "Cointegration: An Introduction to the literature", *Journal of Economic Studies,* Vol. 18, No.3.

15. Pindyck, R.S.and D.L. Rubinfeld, *Econometric Models and Econometric forecasts,* 3rd ed., McGraw - Hill book company, New York, 1991.