–– Iranian Journal of Economic Research–––––––––
In Press
ijer.atu.ac.ir
DOI:

Original Research / Review / ...
Received:
Accepted:
ISSN:
eISSN:

Estimation of the Vector Autoregressive Model with the Multivariate Skew Normal Distribution for the Shocks and Analysis of Its Performance for Two Real Data Sets

Manijeh Mahmoodi
The Student of PhD, Statistics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran,

Mohammad Reza Salehi Rad *
Department of Statistics, Faculty of Statistics, Mathematics and Computer science, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.

Abstract

The modeling is a very important topic in economic and financial research and it has a basic role in the analyzes, decisions, the policies and planning. In the modeling, assumptions have an important role in estimation and forecasting, because they can affect the results of models and analyses. The one of the most widely used classical time series models is the autoregressive model, where the current values are the finite linear combination of its past values. On the other hand, in real problems, many variables affect each other. For this reason, the vector time series models are used, which are part of the multivariate time series. The Vector autoregressive models are used in economic and financial modeling. The vector autoregressive (VAR) models are usually considered with the normal distribution for the shocks (noises). Since, in economic and financial issues, especially macroeconomics, the shocks don't have symmetric distribution. In this paper, the VAR model with the Multivariate Skew Normal (MSN) distribution for the shocks is considered and since, the estimation of the parameters is an important step in modeling, the parameters of the model are estimated by using the Expectation Conditional Maximization (ECM) algorithm.

* Corresponding Author: E-mail: salelehirad@ atu.ac.ir

Finally, by using the real data sets of Canada and Iran where the shocks have skewness and the evaluation criteria of the models, it is shown that the VAR model with MSN distribution for shocks in these data is more efficient than the VAR model with the multivariate normal distribution for shocks.

Keywords: Vector autoregressive, skewness, multivariate skew normal, maximum likelihood estimation, expectation conditional maximization algorithm

JEL Classification C13, C32, C51, C46

مقاله پژوهشی
تاریخ دریافت: ۰۰/۰۰/۰۰، تاریخ پذیرش: ۰۰/۰۰/۰۰
ISSN:
eISSN:

-- پژوهش‌های اقتصادی ایران ----------
مقاله آماده انتشار
ijer.atu.ac.ir
DOI:

برآورد مدل اتورگرسیو برداری با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها و تحلیل عملکرد آن برای دو مجموعه داده واقعی

منیژه محمودی — *دانشجوی دکتری رشته آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران*

محمدرضا صالحی راد* — *استادیار گروه آمار، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران*

چکیده

مدل سازی مبحث بسیار مهمی در پژوهش‌های اقتصادی و مالی است و نقش بسیار بالایی در تحلیل‌ها و اتخاذ تصمیمات و سیاست گذاری و برنامه ریزی‌ها دارد. از طرفی در مدل سازی‌ها، مفروضات نقش مهمی در مسئله برآوردها و پیش بینی‌ها ایفا می کنند، زیرا می‌توانند بر نتایج مدل‌ها و تحلیل‌ها اثرگذار باشند. یکی از پرکاربردترین مدل‌های سری زمانی کلاسیک، مدل اتورگرسیو است، که مقادیر فعلی فرآیند ترکیب خطی متناهی از مقادیر گذشته آن می‌باشد. ازطرفی در مسائل واقعی متغیرهای زیادی بر هم تاثیرمی‌گذارند، به همین دلیل مدل‌های سری زمانی برداری به کار گرفته می‌شوند که جزء سری زمانی چند متغیره محسوب می‌گردند. مدل اتورگرسیو برداری در مدل سازی‌های اقتصادی و مالی بسیار پرکاربرد است. از سوی دیگر، مدل‌های اتو رگرسیو برداری معمولا با شوک (نویز) های نرمال در نظر گرفته می‌شوند. از آن‌جایی که در مسائل اقتصادی و مالی به ویژه اقتصاد کلان، شوک‌ها حالت تقارن ندارند ، در این مقاله مدل اتورگرسیو برداری با توزیع نرمال چوله چند متغیره روی شوک‌ها در نظر گرفته می‌شود و چون برآورد پارامترها مرحله مهمی در مدل سازی است، براورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم بیشینه سازی امیدریاضی شرطی به دست آورده می‌شوند. در پایان با استفاده از دو مجموعه داده های واقعی کانادا و ایران که شوک‌ها دارای چولگی می‌باشند و بر اساس معیار های ارزیابی مدل‌ها ، نشان داده می‌شود که مدل اتورگرسیو برداری با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها در این داده ها کارایی بیشتری نسبت به مدل اتورگرسیو با توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها دارد.

* نویسنده مسئول : salelehirad@ atu.ac.ir

کلیدواژه‌ها: اتورگرسیو برداری، الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی شرطی، برآورد بیشینه درست‌نمایی، چولگی، نرمال چوله چند متغیره

JEL Classification C13, C32, C51, C46

۱. مقدمه

مدل سازی یکی از ابزارهای مهم در مسائل اقتصادی و مالی جهت تصمیم گیری‌ها و سیاست گذاری‌های مدیریتی می باشد. از پرکاربردترین روش‌های مدل سازی در زمینه‌های اقتصادی و مالی می توان به سری‌های زمانی اشاره کرد. سری‌های زمانی یکی از زیر مجموعه‌های فرآیندهای تصادفی است. باکس و جنکینز در سال ۱۹۷۰ مدل‌های سری زمانی کلاسیک را معرفی کردند. یکی از معروف‌ترین مدل‌های سری زمانی کلاسیک، مدل اتو رگرسیو[۱] (AR) است که در آن تنها یک متغیر وجود دارد و اثر گذشته متغیر روی آن بررسی می‌شود و با فرض توزیع نرمال برای شوک‌ها پارامترها برآورد می‌شوند. از طرفی به دلیل تاثیر عوامل (متغیرهای کمکی) متعدد بر پدیده مورد بررسی، از مدل‌های کلاسیک استفاده نمی‌شود وسری‌های زمانی چند متغیره به‌کار گرفته می‌شوند. تسای[۲] (۲۰۰۲) به معرفی و تحلیل مدل سری زمانی در حالت یک متغیره و چند متغیره در زمینه‌های مالی و اقتصادی و لوتکپل[۳] (۲۰۰۵) به بررسی مدل‌های اتورگرسیو برداری، میانگین متحرک برداری و ترکیب آن‌ها پرداختند. مدل اتورگرسیو برداری ساختاری[۴] (SVAR) توسط کیلیان و لوتکپل[۵] (۲۰۱۷) مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. مدل‌های سری زمانی چند متغیره در بسیاری از زمینه‌های اقتصادی، پزشکی، زیست شناسی، علوم اجتماعی و غیره استفاده می‌شود. یکی از مهم‌ترین این مدل‌ها، مدل اتورگرسیو برداری است. اکنون به پیشینه تحقیق در زمینه مدل‌های اتورگرسیو و اتورگرسیو برداری با توزیع شوک‌ها اشاره می کنیم. سیمز[۶] (1980) روش مدل سازی بدون ایجاد محدودیت روی ضرایب را به عنوان جایگزینی برای مدل سازی در مقیاس بزرگ در مسائل اقتصاد سنجی بیان کرد. از نظر او اگر بین متغیرها الگوی همزمانی وجود داشته باشد، باید متغیرها را درون زا نگریست و از مدل‌های اتورگرسیو برداری استفاده

1. Autoregressive
2. Tsays, RS.
3. Lütkepohl, H.
4. Structural vector autoregressive
5. Kilian, L., & Lütkepoh, H.
6. Sims,C.

نمود و در ساخت مدل‌های بزرگ محدودیت ایجاد نکرد. پوراحمدی[۱] (۲۰۰۱) مدل اتورگرسیو مرتبه اول را با در نظر گرفتن توزیع‌های نمایی، گاما و هندسی مختلط برای شوک‌ها تحلیل نمود. طارمی و پور احمدی[۲] (۲۰۰۵) مدل اتورگرسیو مرتبه p را با توزیع تی استودنت برای نوسانات مورد بررسی قرار دادند. وی[۳] (۲۰۰۹) روش‌های تک متغیره و چند متغیره را در تحلیل سری‌های زمانی مورد بحث قرار داد. مطالعاتی روی مدل اتورگرسیو با توزیع نرمال اپسیلون چوله برای نوسانات صورت گرفت (Bondon, 2009). زمانی و سیاره[۴] (۲۰۱۵) استنتاج آماری را در مدل اتورگرسیو با خطاهای نامنفی مورد مطالعه قرار دادند. شرفی و نعمت اللهی[۵](۲۰۱۶) مدل اتورگرسیو مرتبه اول را با خطاهای چوله را بررسی نمودند. قاسمی و همکاران[۶] (۲۰۱۹) فرآیندهای اتورگرسیو را با توزیع هذلولی تعمیم یافته برای نوسانات مورد بحث قرار دادند. لیو و همکاران[۷] (۲۰۱۹) با استفاده از الگوریتم بیشینه سازی امیدریاضی پارامترهای مدل را با توزیع دم پهن و داده‌های گم شده برآورد کردند. پژوهشگرانی با در نظر گرفتن توزیع نرمال چوله تعمیم یافته برای نوسانات، به برآورد مدل اتورگرسیو پرداختند (Neethling et al., 2020).

با گذشت زمان، مدل‌های سری زمانی چندگانه برای مدل سازی‌های چند متغیره معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفتند (Lütkepohl, 1991; 2005). پژوهشگرانی مدل‌های اتورگرسیو برداری را بررسی کرده و تفاوت بین اتورگرسیو کاهش یافته، اتورگرسیو بازگشتی و اتورگرسیو ساختاری را مورد بحث قرار دادند (Stock & Watson, 2001). شیوه‌های سری زمانی چند متغیره بیزی برای مدل‌های اتورگرسیو برداری در اقتصاد کلان تجربی توسط محققان مورد مطالعه قرار گرفته است (Koop & Korobilis, 2009). پژوهش‌هایی جهت برآورد بیزی برای مدل‌های اتورگرسیو برداری و برآورد آن مدل‌ها و هم‌چنین پیش بینی مدل با نوسانات تصادفی با توزیع دم پهن نیز صورت گرفته است (Ni & Sun, 2015 ؛ Wai et al, 2017). ملکی و همکاران[۸] (۲۰۱۹) یک توزیع دم پهن

1. Pourahmadi, M.
2. Tarami, B., & Pourahmadi, M.
3. Wei, W.
4. Zamani, S., & Sayyareh, A.
5. Sharafi, M., & Nematollahi, A.
6. Ghasemi , S., et al.
7. Liu, Y., et al.
8. Maleki, M., et al.

نامتقارن را برای مدل اتورگرسیو برداری در نظر گرفته و مورد بررسی قرار دادند. مدل اتورگرسیو برداری امکان بررسی همزمان چند متغیر را می‌دهد، بنا بر این در پژوهش‌های اخیر در زمینه های اقتصادی و مالی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. حیدری[۱] (۲۰۱۰) مدل اتورگرسیو برداری و بیزی را برای پیش بینی تورم به کاربرده است. محمدی[۲] و همکاران (۱۳۹۸) پژوهش پویایی‌های کلان اقتصادی مقررات زدایی در بازارهای محصول کار در کشورهای منا[۳] (منطقه خاورمیانه و شمال آفریقا) را با مدل اتورگرسیو پنل انجام دادند. خرسندی[۴] و همکاران (۲۰۲۰) آثار شوک‌های اقتصادی خارجی بر متغیرهای کلان اقتصادی ایران با رویکرد اتورگرسیو برداری جهانی[۵] (GVAR) مورد مطالعه قراردادند. مدل GVAR مدل‌های تصحیح خطای برداری داخلی را که در آن متغیرهای داخلی با متغیرهای خارجی خاص هر کشور مرتبط هستند، ترکیب می کند. متغیرهای خارجی خاص هر کشور از متغیرهای داخلی ساخته شده است تا بتواند با تجارت بین الملل یا الگوی مورد نظر کشور مورد بررسی مطابقت داشته باشد. تحلیل شبکه بازار مسکن بین استان های ایران توسط میرزایی و همکاران[۶] با استفاده از مدل اتورگرسیو برداری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

با توجه به مطالعات انجام شده بر روی مدل‌های اتورگرسیو برداری، شوک‌های مدل اغلب دارای توزیع نرمال چند متغیره می باشند (Kilian & Lütkepohl, 2017). توزیع نرمال چند متغیره یکی از پرکاربرد ترین توزیع‌های متقارن است. در برخی موارد در مسائل واقعی در زمینه‌های اقتصادی، مالی، بورس، پزشکی، زیست شناسی و غیره، تقارن روی شوک‌ها وجود ندارد. به همین دلیل باید از توزیع نامتقارن (چوله) برای شوک‌ها استفاده نمود. از طرفی خانواده توزیع‌های چوله چند متغیره بسیار بزرگ است و کار روی آن‌ها آسان نمی‌باشد، لذا در این مقاله توزیع نرمال چوله چند متغیره در نظر گرفته شده و پارامترهای مدل اتورگرسیو برداری با استفاده از الگوریتم بیشینه سازی امیدریاضی شرطی براورد شده است. سپس با استفاده از معیارهای ارزیابی مدل روی داده‌های واقعی با شوک‌های نامتقارن نشان داده می‌شود که مدل اتورگرسیو برداری با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها

1. Heidari, H.
2. Mohammdi, T., et al.
3. Middle East and North Africa (MENA)
4. Khorsandi, M., et al.
6. Global Vector Autoregressive (GVAR)
6. Mirzaei, H., et al.

در این داده‌ها نسبت به مدل با توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها مناسب‌تر است. مقاله به شرح زیرتنظیم شده است:

در بخش۲، پیشینه پژوهشی توزیع نرمال چوله چند متغیره و ویژگی‌های این توزیع معرفی شده است. در بخش۳، جزئیات مدل اتورگرسیو برداری و الگوریتم بیشینه سازی امیدریاضی شرطی برای برآورد پارامترهای مدل شرح داده می‌شود. سپس در بخش ۴ عملکرد شیوه استفاده شده روی داده‌های واقعی ارزیابی می گردد. نتیجه گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

۲. مبانی نظری

در این بخش، ابتدا پیشینه پژوهشی توزیع نرمال چوله چند متغیره و مفاهیم نظری مربوط به آن شرح داده می‌شود.

۲-۱. پیشینه توزیع نرمال چوله چند متغیره

اولین پیشنهادات برای توزیع‌های نامتقارن به قرن نوزدهم بر می گردد و آزالینی[۱] (۱۹۸۵) یکی از پژوهشگرانی است که توزیع نرمال یک متغیره را معرفی کرده است. در نظر گرفتن خانواده‌های نامتقارن نرمال توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. معیارهای اندازه‌گیری چولگی و برجستگی توسط ماردیا[۲] (۱۹۷۰) ارائه شده است.آزالینی و کاپیتانیو[۳] (۱۹۹۹) توزیع نرمال چوله چند متغیره و کاربرد آماری آن‌را معرفی کرده‌اند و در سال ۲۰۱۴ تحقیقات کامل خود را بر روی نرمال چوله و خانواده آن‌ها ارائه کردند. و توزیع نرمال تعمیم یافته چوله[۴](SGN)آن توسط آرلانوواله و همکاران (۲۰۰۴) معرفی شده است. آزالینی (۲۰۰۵) در مقاله مروری خود به توزیع نرمال چوله یک متغیره، چند متغیره و خانواده توزیع های چندمتغیره مرتبط پرداخته است. آرلانو واله و جنتون[5] (۲۰۰۵) یک کلاسی جدید از خانواده توزیع نرمال چوله چند متغیره را به نام توزیع FUSN[6] معرفی کردند و گسترش آن را به توزیع های چوله بیضوی و چوله کروی مورد بحث قرار دادند.

1. Azzalini, A.
2. Mardia
3. Azzalini, A., & Capitanio, A.
4. Skew generalizes normal
5. Arellano-Valle, RB., and Genton, MG.
1. Fundamental skew normal

هم‌چنین پژوهشگرانی مانند آرلانوواله و آزالینی (۲۰۰۶) مطالعاتی در زمینه توزیع نرمال چوله چند متغیره انجام داده‌اند. ما در این مقاله شوک‌های مدل اتو رگسیو برداری[۱] (VAR) را توزیع نرمال چوله چند متغیره درنظر می‌گیریم که این مدل در بخش بعد معرفی می‌گردد.

۲-۲. توزیع نرمال چوله چند متغیره

در این بخش قصد داریم به توزیع نرمال چوله چند متغیره[۲] (MSN) و ویژگی‌های آن بپردازیم. اگر Y یک بردار با اندازه $k \times 1$ از توزیع نرمال چوله چند متغیره $(Y \sim MSN\ (\xi, \sum, S))$ باشد، که ξ بردار مکانی $k \times 1$، $\sum$ ماتریس پراکندگی و مثبت مرتبه $k \times k$ و S ماتریس چولگی قطری باشد، آن‌گاه طبق مطالعاتی که توسط گوپتا[۳] (۲۰۰۲)، سوجیت و همکاران[۴] (۲۰۰۳) و تی سانگ[۵] (۲۰۰۹) در مورد توزیع نرمال چوله چند متغیره صورت گرفته است، تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f(y) = 2^k}\ \boldsymbol{\phi_k}\ (0, \Omega)\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{S}'\Omega^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}); \mathbf{0}, \boldsymbol{\Delta}) \qquad (۱)$$

که در آن $\Omega = \sum + SS'$، $\Delta = (I + S'\sum^{-1}S)^{-1} = I - S'\Omega^{-1}\ S$، $S = diag(s_1, s_2, \dots, s_k)$، $\phi_k(\cdot,\cdot)$ تابع چگالی نرمال و $\Phi(\cdot,\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال است. اگر S برابر ماتریس صفر باشد آن‌گاه Y دارای توزیع نرمال چند متغیره است و با نماد $Y \sim MN\ (\xi, \sum, S)$ نشان داده می‌شود. فرم سلسه مراتبی توزیع نرمال چوله چند متغیره به صورت زیر نشان داده می‌شود:

سوجیت و همکاران (۲۰۰۳) طبق بررسی توزیع نرمال چوله چند متغیره در رگرسیون بیزی، آرلانو واله و جنتون[۶] (۲۰۰۵) و تی سانگ و همکاران[۷] (۲۰۰۹) در تحلیل مدل ها با توزیع نرمال چوله، نشان دادند که اگر $Z_0 \sim N_k(O, I_k)$ و $Z_1 \sim N_k(\xi, \sum)$ مستقل باشند، آن‌گاه $Y = S\,|Z_0| + Z_1$ دارای یک توزیع نرمال چوله چند متغیره خواهد بود و با نماد

2. Vector autoregressive
2. Multivariate skew normal
3. Gupta, A. & Chang, C.
4. Sujit, S., et al.
5. Tsung, L.
6. Arellano-Valle, RB., & Geneton, MG
7. Tsung, L., et al.

$Y \sim MSN_k\ (\xi, \sum, S)$ نشان داده می‌شود. هم‌چنین فرم سلسله مراتبی توزیع نرمال چوله چند متغیره برابر است با :

$$Y|W = w \sim \mathrm{MN_k}\,(Sw + \xi, \textstyle\sum) \qquad (۲)$$
$$W \sim TN_k\,(\mathrm{o}, \mathrm{I})\ I(\Re_+^k)\,, \quad \Re_+^k = (0, +\infty)^k$$

که در آن w یک بردار $k \times 1$ است که هر مولفه آن دارای توزیع نرمال در بازه صفر و یک (توزیع نرمال کاسته شده) می باشد. طبق توصیف ذکر شده در ساختار فرم سلسله مراتبی ، اگر $|\mathrm{Z_0}| \sim \mathrm{TN}\,(\mathrm{O}, \mathrm{I}_{\mathrm{k}})$ آنگاه $\mathrm{E}\,|\mathrm{Z_0}| = \sqrt{2/\pi}\ 1_{\mathrm{k}}$ و ماتریس کوواریانس آن $\mathrm{Var}\,(|\mathrm{Z_0}|) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\mathrm{I}_{\mathrm{k}}$ خواهد یود و طبق تحقیقات آزالینی و کاپیتانیو[1] (۲۰۱۴) و آرلانو واله[2] (۲۰۰۵) داریم:

$$E(Y) = E(S\,|Z_0| + Z_1) = S\,E|Z_0| + E(Z_1) = S\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ 1_k + \xi \qquad (۳)$$

$$Var(Y) = S\,Var|Z_0|\,S' + Var(Z_1) = S\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)I_k\,S' + \textstyle\sum = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)S\,S' + \textstyle\sum \qquad (۴)$$

۳. برآورد مدل VAR با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها

در این بخش، ابتدا مدل اتورگرسیو برداری را بیان کرده و سپس شیوه برآورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم بیشینه سازی امیدریاضی شرطی شرح داده می‌شود.

۳-۱. مدل اتورگرسیو برداری

در این زیر بخش، ما مدل اتو رگرسیو برداری مرتبه p با توزیع نرمال چوله چندمتغیره روی شوک‌ها را در نظر می گیریم. این مدل به صورت زیر نوشته می‌شود:

1. Azzalini, A., & Capitanio, A
2. Arellano-Valle, RB., et al.

$$\mathrm{V\,AR}(p): \quad \mathcal{Y}_{\mathrm{t}} = \mathrm{v} + \mathrm{A}_1\mathcal{Y}_{\mathrm{t}-1} + \mathrm{A}_2\mathcal{Y}_{\mathrm{t}-2} + \ \dots + \mathrm{A}_{\mathrm{p}}\mathcal{Y}_{\mathrm{t}-p} + \varepsilon_{\mathrm{t}} \tag{۵}$$

که در آن

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_{1\,t} \\ \nu_{2\,t} \\ \vdots \\ \nu_{k\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1\,t} \\ y_{2\,t} \\ \vdots \\ y_{k\,t} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{11,i} & \cdots & a_{1\,k\,,i} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k\,1\,,i} & \cdots & a_{k\,k\,,i} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\,t} \\ \varepsilon_{2\,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k\,t} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \cdots, p$$

و $\varepsilon_t \underset{\sim}{iid} MSN(o, \sum, S)$ که o بردار مکانی، $\sum$ ماتریس پراکندگی (پارامتر مقیاس) با درایه های σ_{ij} ها در سطر i ام و ستون j ام و S ماتریس قطری (پارامتر چولگی) ، می‌باشند و تابع چگالی برابر است با:

$$f(\varepsilon_t) = 2^k\, \boldsymbol{\phi_k}(o, \Omega)\, \boldsymbol{\Phi}(S'\Omega^{-1}\varepsilon_t; 0, \Delta) \tag{۶}$$

که در آن $\phi_k(\cdot,\cdot)$ تابع چگالی نرمال و $\Phi(\cdot,\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال است.

۳-۲. روش بیشینه درست‌نمایی

طبق رابطه ۵، تابع درستنمایی با T مشاهده مستقل با فرض بردار مقادیر ثابت v برابر صفر در مدل اتو رگرسیو برداری مرتبه p با توزیع نرمال چوله چندمتغیره روی شوک‌ها ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(A_1, \dots, A_P, \Omega, S) = 2^{kT} \prod_{t=1}^{T} \boldsymbol{\phi_k}\big(\mathcal{Y}_t - A_1\mathcal{Y}_{t-1} - A_2\mathcal{Y}_{t-2} - \ \dots - A_p\mathcal{Y}_{t-p}\,; \Omega\big)$$
$$\times\ \boldsymbol{\Phi}\big(S'\Omega^{-1}(\,\mathcal{Y}_t - A_1\mathcal{Y}_{t-1} - A_2\mathcal{Y}_{t-2} - \ \dots - A_p\mathcal{Y}_{t-p})\,\big) \tag{۷}$$

و لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با:

$$\ell(A_1, \cdots, A_P, \Omega, S) = kT\,Ln\,2 + \sum Ln\,\boldsymbol{\phi_k}\big(\mathcal{Y}_t - A_1\mathcal{Y}_{t-1} - A_2\mathcal{Y}_{t-2} - \ \dots - A_p\mathcal{Y}_{t-p}\,; \Omega\big)$$
$$+ \sum Ln\,\boldsymbol{\Phi}\big(S'\Omega^{-1}(\,\mathcal{Y}_t - A_1\mathcal{Y}_{t-1} - A_2\mathcal{Y}_{t-2} - \ \dots - A_p\mathcal{Y}_{t-p})\,\big) \tag{۸}$$

برای بدست آوردن براورد بیشینه درست‌نمایی برای پارامترهای ضرایب، چولگی و ماتریس پراکندگی مدل ۵، ما به مشتق‌گیری از رابطه (۸) نیازمندیم. به دلیل این‌که از حل مشتقات فرم بسته ای برای برآورد پارامترها به دست نمی‌آید ، لازم است از شیوه‌های عددی برای تقریب براورد استفاده شود. از طرفی، برآورد بیشینه درست‌نمایی بر اساس شیوه‌های عددی به مقادیر اولیه بسیار حساس است. برای حل این مشکل می توان از الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی شرطی[1] (ECM) که در همگرایی نیز پایدارتر است استفاده کرد. بر اساس فرم سلسله مراتبی داریم:

$$\varepsilon_t \mid H_t = h_t \sim MN_k\,(S\,h_t, \Sigma) \qquad (۹)$$

$$H_t \sim TN_k\,(\mathrm{o}, \mathrm{I})\;\; I(\Re_+^k)$$

$$H_t \mid \varepsilon_t \sim TN_k\,(S'\Omega^{-1}\varepsilon_t;\ \Delta, \Re_+^k)$$

تابع درست‌نمایی شرطی ($L\,(\Theta \mid \varepsilon, H)$) و الگوریتم تابع درست‌نمایی شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L\,(\Theta \mid \varepsilon, H) = \prod_{t=1}^{T} \boldsymbol{\phi_k}\,(\varepsilon_t;\ S\,h_t, \Sigma)\, TN\,(h_t; O, I)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{\frac{-1}{2}}\ |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\ EXP\left\{-\frac{1}{2}\,(\varepsilon_t - Sh_t)'\ \Sigma^{-1}\,(\varepsilon_t - Sh_t)\right\} 2^k EXP\left\{-\frac{1}{2}\,h'_t\,h_t\right\}$$

و داریم:

$$\mathrm{Ln}\,\mathrm{L}\,(\Theta \mid \varepsilon, \mathrm{H}) = \ell(\Theta \mid \varepsilon, \mathrm{H})$$

$$\propto \mathrm{Ln}\left[\prod_{t=1}^{T} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{EXP}\left\{-\frac{1}{2}\,(\varepsilon_t - Sh_t)'\ \Sigma^{-1}\,(\varepsilon_t - Sh_t)\right\} 2^k \mathrm{EXP}\left\{-\frac{1}{2}\,h'_t\,h_t\right\}\right]$$

$$\propto -\frac{T}{2}\mathrm{Ln}\,|\Sigma| \ -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t - Sh_t)'\ \Sigma^{-1}\,(\varepsilon_t - Sh_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} h'_t\,h_t$$

1. Expectation conditional maximization algorithm (ECM)

$$\propto -\frac{T}{2}\ Ln\,|\Sigma|\ -\frac{1}{2}\ \sum_{t=1}^{T}\Big(\mathrm{Y_t}-\sum_{j=1}^{p}\mathrm{A_j Y_{t-j}}-\mathrm{Sh_t}\Big)'\ \Sigma^{-1}\ \Big(\mathrm{Y_t}-\sum_{j=1}^{p}\mathrm{A_j Y_{t-j}}-\mathrm{Sh_t}\Big)-\frac{1}{2}\ \sum_{t=1}^{T}\mathrm{h'_t\,h_t} \qquad (۱۰)$$

که $\Theta=(A_1,\dots,A_P,\Sigma,\mathrm{S})$ است.

۳-۳. الگوریتم ECM

در این بخش به معرفی مراحل الگوریتم ECM برای براورد پارامترهای مدل اتورگرسیو برداری با درنظر گرفتن توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها می‌پردازیم. امید ریاضی لگاریتم درست‌نمایی شرطی با نماد زیر نشان داده می‌شود،

$$\mathrm{Q}(\Theta\,|\widehat{\Theta}\,)=\mathrm{E}\big(\ell\ (\Theta|\mathrm{y})\big)\equiv\mathrm{E}\big(\ell\ (\Theta|\varepsilon)\big)$$

و مراحل بیشینه سازی شامل گام‌های زیر است:

گام اول: برآورد مقادیر اولیه‌ی پارامترهای ضرایب و مقیاس با فرض عدم چولگی ، به عبارت دیگر برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو برداری با فرض توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها

گام دوم: براورد ضرایب مدل

$$\widehat{\mathrm{A}}^{(k+1)}{}_{i}\ =\Big[\sum_{t=1}^{p}\big(\mathrm{Y_t}-\sum_{i\neq j\ =1}^{p}\widehat{\mathrm{A}}_j^{(k)}\ \mathrm{Y_{t-j}}-\widehat{\mathrm{S}}^{(k)}\ \mathrm{E}(\widehat{\mathrm{H_t}|\varepsilon_t})^{(k)}\ \big)\ \ \mathrm{Y'_{t-1}}\Big]\times\Big[\sum_{t=1}^{T}\mathrm{Y_{t-i}\ Y'_{t-i}}\Big]^{-1} \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$\mathrm{h}_t^{(k)}|\varepsilon_t \sim \mathrm{TN}(\widehat{S^{(k)}}\widehat{\Omega^{(k)}}\ \varepsilon_t,\widehat{\Delta^{(k)}})$$

$$\widehat{\Omega}^{(k)}=\widehat{\Sigma}^{(k)}+(\widehat{\mathrm{S}}^{(k)})(\widehat{\mathrm{S}}^{(k)})'$$

$$\Delta^{(k)}=\mathrm{I}-(\widehat{\mathrm{S}}^{(k)})'(\widehat{\Omega}^{(k)})^{-1}\,\widehat{S}^{(k)}$$

گام سوم: برآورد پارامتر چولگی

$$\hat{S}^{(k+1)} = \mathrm{diag}\Big(\Big[\textstyle\sum_{t=1}^{T}\big(Y_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j^{(k)} Y_{t-j}\big)\big(\hat{E}\,(H_t|\varepsilon_t)^{(k)}\big)' \Big] \Big[\textstyle\sum_{t=1}^{T} \hat{E}(H_t H'_t|\varepsilon_t)^{(k)}\Big]^{-1}\Big) \tag{۱۲}$$

گام چهارم: برآورد پارامتر مقیاس

$$\hat{\Sigma}^{(k+1)} = \frac{1}{T}\Bigg[\sum_{t=1}^{T}\Big(Y_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j^{(k)} Y_{t-j}\Big)\Big(Y_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j^{(k)} Y_{t-j}\Big)' - \sum_{t=1}^{T}\Big(Y_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j^{(k)} Y_{t-j}\Big)\hat{E}'(H_t|\varepsilon_t)^{(k)}\,\hat{S'}^{(k)} - \left(\sum_{t=1}^{T}\Big(Y_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j^{(k)} Y_{t-j}\Big)\hat{E}'(H_t|\varepsilon_t)^{(k)}\,\hat{S'}^{(k)}\right)' + \sum_{t=1}^{T} \hat{S}^{(k)}\,\hat{E}(H_t H'_t|\varepsilon_t)^{(k)}\,\hat{S'}^{(k)}\Bigg]$$

گام پنجم: تکرار گام‌های دوم الی پنجم تا زمان برقراری شرط همگرایی فرآیند

$$\left|\frac{\ell(\hat{\theta}^{(k+1)}|y)}{\ell(\hat{\theta}^{(k)}|y)} - 1\right| \le \varepsilon$$

٤. داده های کاربردی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی بر روی دو مجموعه داده‌های واقعی کانادا و ایران با استفاده از نرم افزار R بررسی می‌گردد. برای تعیین مانایی داده‌ها از آزمون دیکی فولر[۱] و برای تعیین مرتبه مدل اتورگرسیو برداری ملاک‌های آکائیک[۲] (AIC)، حنان کوئین[۳] (HQ) و شوارتز بیزی[۴] (SC) استفاده می‌شود. لازم به ذکر است برای شرط ایستایی در مدل اتورگرسیو برداری باید ریشه‌های معادله $|I - Az| = 0$ برای $|z| \ge 1$ برقرار باشد (Lütkepohl, 2005) و این شرط نیز بررسی می‌گردد. اگر چه چولگی در حالت یک

1. Dickey-Fuller
2. Akaike
3. Hannan Quinn
4. Schwarz

متغیره عدم تقارن است و مفهوم ساده ای به نظر می رسد؛ اما، برای حالت چند متغیره ماردیا[1] (۱۹۷۴) و بالاکریشنان و اسکارپا[2] (۲۰۱۲) معیار Mardia را برای بررسی چولگی و کشیدگی نرمال چند متغیره ارائه کرده اندکه چولگی چند متغیره در حالت دوبردار p بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_{1,p} = E[(X-\mu)' \Sigma^{-1}(Y-\mu)]^3.$$

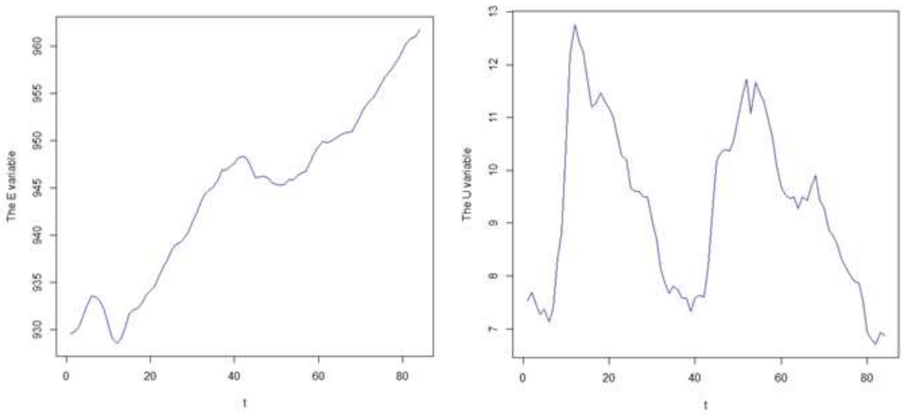
با بررسی چولگی شوک‌ها، مدل برازش داده می‌شود. مقدار اپسیلون در شرط همگرایی الگوریتم در این بخش $\mathbf{10^{-4}}$ در نظر گرفته شده است. سپس معیار اطلاعات آکاییک یعنی $\boldsymbol{AIC = 2k - 2\,\ell(\widehat{\Theta}\,|Y)}$ (آکاییک،۱۹۷٤) و معیار اطلاعات بیزی یعنی $\boldsymbol{BIC = K\log n - 2\,\ell(\widehat{\Theta}\,|\,Y)}$ (شوارتز، ۱۹۷۸) برای ارزیابی عملکرد مدل اتورگرسیو برداری با فرض توزیع نرمال چند متغیره و توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها بر دو مجموعه داده های واقعی کانادا و ایران استفاده می‌شود.

٤-١. داده های کاربردی کانادا

در این بخش، مجموعه‌ای از داده‌های اقتصادی مربوط به کانادا از سال ۱۹۸۰ تا ۲۰۰۰ با متغیر اشتغال (E) و نرخ بیکاری (U) به صورت فصلی در نرم افزار R ، در نظر گرفته شده و به برازش مدل می‌پردازیم. نمودارهای سری زمانی برای داده‌های E و U در مقابل زمان در شکل ۱ رسم شده‌اند. این نمودارها و آزمون دیکی فولر (آزمون ریشه واحد) برای داده‌های E و U به ترتیب با مقادیر ۲/۱۴۸- و ۲/۵۹۸- که منجر به رد فرضیه صفر نمی‌شوند، نشان می‌دهند که داده‌ها مانا[3] نیستند و باید مانا شوند. شکل ۲ نمودار داده‌های E و U را بعد از تفاضل گیری در مقابل زمان نشان می‌دهد و به نظر می‌رسد که داد ه‌ها با اولین تفاضل گیری مانا شده اند. از طرفی، براساس آزمون دیکی فولر برای متغیرهای تفاضل گیری شده E و U به ترتیب با مقادیر ۳/۲۶۶۹- و ۳/۷۳۲۵- فرضیه صفر رد می‌شود و مانایی داده‌های تفاضل گیری شده تایید می‌شوند.

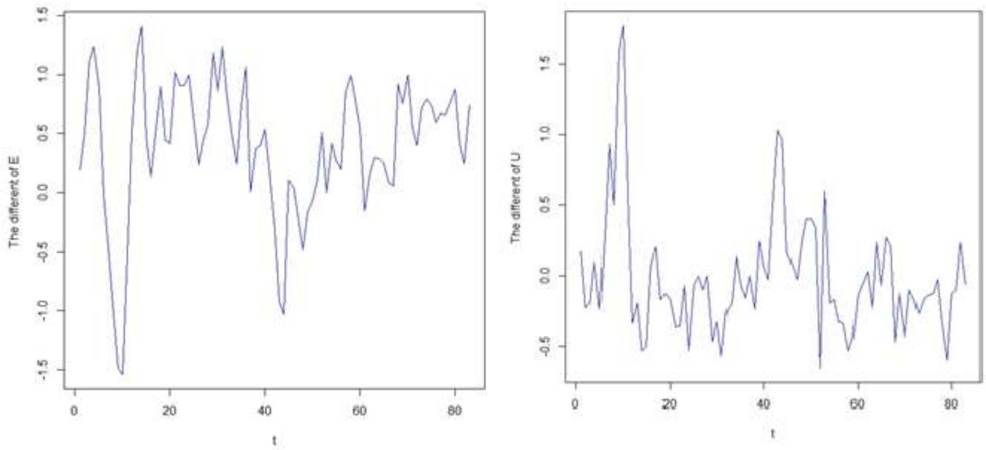
1. Mardia
2. Balakrishnan, N. & Scarpa, B.
3. Stationary

شکل ۱. نمودار سری زمانی داده‌های کانادا برای متغیرهای E و U



مأخذ: یافته‌های پژوهش

شکل ۲. نمودار سری زمانی داده های کانادا بعد از تفاضل‌گیری E و U



مأخذ: یافته‌های پژوهش

بر اساس ملاک‌های آکائیک، حنان کوئین و شوارتز بیزی در جدول ۱مرتبه مدل اتورگرسیو برداری، یک تعیین می‌شود. از طرفی با برازش مدل اتورگرسیو برداری مرتبه یک و محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه که به ترتیب ۱/۲۱۵ و ۲/۳۹۱۷ و بزرگتر از یک می‌باشند شرط مانایی مدل تایید می گردد.

جدول ۱. مقادیر آکاییک و حنان کوئین و شوارتز بیزی برای تعیین مرتبه مدل

مرتبه	۱	۲	۳	۴	۵
AIC	-۵/۱۷۱۹۴۵*	--۵/۱۶۷۱۵۷	-۵/۱۱۵۷۲۵	-۵/۱۵۱۵۴۵	-۵/۰۸۲۲۶۳
HQ	-۵/۰۹۶۶۹۲*	-۵/۰۴۲۱۱۸۴۴	-۴/۹۴۰۶۷۰	-۴/۹۲۶۴۷۴	-۴/۸۰۷۱۷۶
SC	-۴/۹۸۳۶۸۸*	-۴/۸۵۳۳۹۶	-۴/۶۷۶۴۵۹	-۴/۵۸۶۷۷۵	-۴/۳۹۱۹۸۸

علامت * مرتبه انتخاب شده توسط معیار را نشان می‌دهد.
مأخذ: یافته‌های پژوهش

براساس آزمون ماردیا[1]، آزمون این‌که چولگی و کشیدگی با توزیع نرمال چند متغیره مطابقت دارد یا خیر، مقدار چولگی ۰/۸۳۸۰۸۹ با مقدار- p برابر ۰/۰۱۶۱۵۷ ومقدار کشیدگی برابر ۹/۳۳۹۹ با مقدار-p برابر ۰/۹۹۷ در سطح ۵ درصد چولگی معنی‌دار است و کشیدگی معنی‌دار نیست، بنا براین توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها درنظر گرفته می‌شود. بنا بر این، مدل اتو رگرسیو برداری مرتبه۱ با فرض توزیع نرمال چند متغیره و توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها در جدول ۲ برازش داده شده است. بر طبق معیار های AIC و BIC که در جدول ۳ بدست آمده اند، نشان می‌دهد که برای این داده ها مدل اتورگرسیو مرتبه یک با فرض توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها مناسب تر و کاراتر از مدل اتورگرسیو مرتبه یک با فرض توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها می‌باشد. زیرا کمترین مقادیر آکائیک، بیزی و منفی لگاریتم درست‌نمایی را نسبت به مدل دیگر دارد.

1. Mardia

جدول۲. پارامترهای برآورد شده در مدل **VAR(1)** برای داده های تفاضل‌گیری شده کادانا

براورد ها	$\varepsilon_t \sim MN_2$	$\varepsilon_t \sim MSN_2$
$\hat{a}_{11}$	۰/۹۱۰۳	۰/۷۰۹۴
$\hat{a}_{12}$	۰/۲۱۳۹	-۰/۰۱۴۹
$\hat{a}_{21}$	-۰/۲۰۱۸	-۰/۴۶۶۳
$\hat{a}_{22}$	۰/۳۳۰۳	۰/۰۲۵۵
$\hat{s}_1$	-	۰/۰۷۰۳
$\hat{s}_2$	-	۰/۱۰۶۶
$\hat{\sigma}_{11}$	۰/۱۶۴۶	۰/۱۵۹۵
$\hat{\sigma}_{12}$	-۰/۰۹۱۰۶	-۰/۱۰۰۳
$\hat{\sigma}_{21}$	-۰/۰۹۱۰۶	-۰/۱۰۰۳
$\hat{\sigma}_{22}$	۰/۱۱۴۰۰	۰/۰۹۷۷

مأخذ: یافته‌های پژوهش

جدول ۳. معیارهای **AIC** و **BIC** برای مدل‌ها

توزیع شوک‌ها	AIC	BIC	-Log-Like
$\varepsilon_t \sim MN_2$	۲۸۲/۰۲۲۶	۲۸۶/۸۳۶	۱۳۹/۰۱۱
$\varepsilon_t \sim MSN_2$	۲۶۰/۶۷۸۱	۲۶۵/۴۹۱۵	۱۲۸/۳۳۹

مأخذ: یافته‌های پژوهش

مدل برازش داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_{1t} = 0.7094\ y_{1t-1} - 0.0149\ y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = -0.4663\ y_{1t-1} + 0.0255\ y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

که در آن y_1 و y_2 به ترتیب متغیر های تفاضل‌گیری شده E و U می باشند.

٤-۲. داده های کاربردی ایران

در این بخش، متغیر AFE (شاخصکشاورزی، جنگل‌داری و ماهیگیری[1]) را که درصدی از تولید ناخالص د اخلی[2] (GDP) است را در نظر می‌گیریم. صنعت کشاورزی مطابق با طبقه بندی استاندارد بین المللی صنعتی[3] (ISIC) شامل چندین بخش کشاورزی، جنگل داری و ماهیگیری می‌شود که در تولید ناخالص داخلی اثرگذار است. به نظر می‌رسد این متغیر بر اشتغال زنان[4] (EW) در صنعت تاثیر گذار است. زیرا زنان نقش مهمی را در بخش های کشاورزی و شیلات و صنعت ایفا می‌کنند و پژهش‌هایی در این زمینه ها توسط محققان صورت گرفته است که می‌توان به فریار و همکاران[5] (۲۰۲۲) و اسفنجیر (۱۳۹۹) اشاره نمود.
داده‌های سالانه AFF و EW از سایت بانک جهانی https://data.worldbank.org/country/iran-islamic-rep برای سال‌های ۱۹۹۱ تا ۲۰۲۱ گرفته شده است. آزمون دیکی فولر (ریشه واحد) برای داده‌های AFE و EW به ترتیب با مقادیر ۰/۳۳۵۶- و ۰/۱۴۳۸ که منجر به رد فرضیه صفر نمی‌شوند، نشان می‌دهند که داده‌ها مانا نیستند و باید مانا شوند. شکل۳ نمودار داده های AFF و EW را نسبت به زمان بعد از تفاضل‌گیری نشان می‌دهد و به نظر می‌رسد که داد ه ها با اولین تفاضل‌گیری مانا شده اند. از طرفی، براساس آزمون دیکی فولر برای متغیرهای تفاضل‌گیری شده AFE و EW به ترتیب با مقادیر ۳/۶۷۳۳- و ۳/۱۱۶۷- با مقادیر-p کمتر از ۵ درصد فرضیه صفر رد می‌شود و مانایی داده‌های تفاضل‌گیری شده تایید می‌شوند. بر اساس ملاک‌های

1. Agriculture, forestry and fishing
2. Gross domestic product
3. International Standard Industrial Classification
4. Employment of women
5. Faryaar, H., et al.

آکائیک، حنان کوئین و شوارتز بیزی در جدول ۴ مرتبه مدل اتورگرسیو، یک درنظر گرفته می‌شود. از طرفی با برازش مدل اتورگرسیو برداری مرتبه یک و محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه که به ترتیب ۵/۸ و۲۲/۱ و بزرگتر از یک می‌باشند شرط مانایی مدل تایید می گردد.

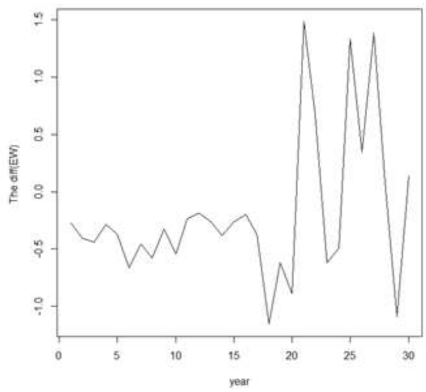
جدول ٤. مقادیر آکاییک و حنان کوئین و شوارتز بیزی برای تعیین مرتبه مدل

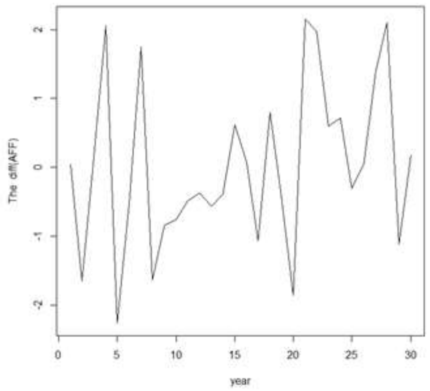
مدل	1	2	3	4	5
AIC	-0/47261*	-0/41093	-0/363054	-0/426175	-0/16008
HQ	-0/39448*	-0/28070	-0/180740	-0/191771	-0/126411
SC	-0/17810*	-0/079923	0/32414	0/457365	0/987461

علامت * مرتبه انتخاب شده توسط معیار را نشان می‌دهد.
مأخذ: یافته‌های پژوهش

بر اساس آزمون Mardia ، مقدار چولگی شوک‌ها برابر ۲/۲۵۰۰۴ با مقدار-p برابر ۰/۰۱۱۹ و مقدارکشیدگی برابر ۸/۸۹۴۱ با مقدار-p برابر ۰/۹۹۴۸ در سطح ۵ درصد نشان می‌دهد چولگی شوک‌ها نسبت به توزیع نرمال چند متغیره معنی دار است و چولگی شوک‌ها تائید می‌شود ولی کشیدگی معنی دار نیست، بنا براین توزیع نرمال چوله چند متغیره را برای شوک‌ها درنظر گرفته و مدل را برازش می‌دهیم.

شکل ۳. نمودار سری زمانی داده های ایران بعد از تفاضل‌گیری AFF وEW





مأخذ: یافته‌های پژوهش

برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه اول با فرض توزیع نرمال چند متغیره و توزیع نرمال چوله برای شوک‌ها و معیارهای AIC و BIC برای ارزیابی مدل‌ها در جدول۵ به دست آمده است. بر اساس آن‌ها می‌توان نتیجه گرفت که برای این داده‌ها مدل اتورگرسیو مرتبه یک با فرض توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها مناسب‌تر و کاراتر از مدل اتورگرسیو مرتبه یک با فرض توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها است. زیرا کمترین مقادیر آکائیک، بیزی و منفی لگاریتم درست‌نمایی را نسبت به مدل دیگر دارد.

جدول۵. پارامتر های برآورد شده در مدل **VAR(1)** برای داده های تفاضل گیری شده ایران

براورد ها	$\varepsilon_t \sim MN_2$	$\varepsilon_t \sim MSN_2$
$\hat{s}_1$	-	۰/۱۱۰۴
$\hat{s}_2$	-	-۰/۰۷۹۸
$\hat{\sigma}_{11}$	۱/۲۳۹۷	۱/۲۲۶۷
$\hat{\sigma}_{12}$	۰/۲۷۴۸	۰/۲۸۳۶
$\hat{\sigma}_{21}$	۰/۲۷۴۸	۰/۲۸۳۶
$\hat{\sigma}_{22}$	۰/۳۸۵۵	۰/۳۷۹۶

AIC	۱۴۶/۱۱۴۵	۱۴۵/۹۱۸۵
BIC	۱۴۸/۸۴۹۱	۱۴۸/۶۵۳۱

مأخذ: یافته‌های پژوهش

مدل برازش داده شده می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$y_{1t} = -0.25626\, y_{1t-1} - 0.78496\ \ y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = -0.09239\, y_{1t-1} + 0.29052\ \ y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

که در آن y_1 و y_2 به ترتیب متغیرهای تفاضل گیری شده AFF و EW می باشند.

۵. نتیجه‌گیری

تحلیل سیاست گذری‌های کلان اقتصادی مستلزم توجه به بررسی و تحلیل صحیح داده ها و مدل سازی مناسب برای آن‌ها است. هدف این مقاله گسترش مدل سری زمانی چند متغیره بوده است زیرا این مدل‌ها در پژوهش‌های داخلی و خارجی در زمینه های مالی و اقتصادی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. نوآوری این مقاله، در نظر گرفتن مدل اتورگرسیو چند متغیره مرتبه p ‏((VAR(p)‏)، با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها است. زیرا در برخی موارد در مسائل واقعی مالی، اقتصادی و پزشکی شوک‌های مدل از توزیع نرمال چند متغیره پیروی نمی‌کنند. برای برآورد پارامتر های این مدل از روش بیشینه درست‌نمایی استفاده گردید. از آن‌جایی که فرم‌های بسته برای برآورد پارامترها از حل مشتقات حاصل نمی‌شود، الگوریتم ECM برای برآورد پارامترهای مدل به کار گرفته شد. سپس با استفاده از دو مجموعه داده‌های واقعی کشور کانادا (برای مدل‌بندی هم‌زمان متغیرهای E و U) و کشورایران (برای مدل‌بندی هم‌زمان متغیرهای AFF و EW)که شوک ها دارای چولگی بوده‌اند، مدل VAR با مرتبه تعیین شده برای داده ها با درنظر گرفتن توزیع نرمال چوله چند متغیره و توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها برازش داده شد و مشاهده گردید که در این داده ها مدل اتورگرسیو برداری با توزیع نرمال چوله چند متغیره برای شوک‌ها طبق معیارهای

اطلاعاتی AIC و BIC مناسب‌تر و کاراتر از مدل با توزیع نرمال چند متغیره برای شوک‌ها بوده است.

ORCID

Manijeh Mahmoodi	https://orcid.org/0009-0003-7143-2396
Mohammad Reza Salehi Rad	http://orcid.org/0000-0003-1519-7590

References

Akaik, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans Automat Contr.*19,716–723. doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705

Arellano-Valle, RB., & Azzalini, A. (2006). On the unification of families of skew-normal distributions. *Scandinavian Journal of statistics, 33,* 561-574.

Arellano-Valle, RB., & Genton, MG. (2005). Fundamental skew Distributions. *Journal of Multivariate Analysis, 96,* 93– 116. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2004.10.002

Arellano-Valle, R B., Gomez, H. W., & Quintana, F. A. (2004). A new class of skew-normal distributions. *Communication in statistics- Theory and Methods, 33,*1465-1480.

Arellano-Valle, R B., Ozan, S., Bolfarine, H., Lachos, VH. (2005). Skew-normal measurement error models. *Journal of Multivariate Analysis, 96,* 265–281. doi.org/10.1016/j.jmva.2004.11.002

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics, 12,* 171-178.

Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families. *Scandinavi journal of statistics, 32, 159-188.*

Azzalini, A., & Capitanio, A. (1999). Statistical application of the multivariate skew- normal distribution. *Journal of Royal Statistical Society, series B, 61,* 579-602.

Azzalini, A., & Capitanio, A. (2014). The Skew-Normal and Related Families. Cambridge CB2 8BS, United Kingdom.

Balakrishnan, N., & Scarpa, B. (2012). Multivariate measures of skewness for the skew-normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, *104*, 73–87. doi.org 10.1016/j.jmva.2011.06.017

Bondon, P. (2009). Estimation of autoregressive models with epsilon-skew-normal innovations. *Journal of Multivariate Analysis 100(8)*, 1761-1776. doi.org/10.1016/j.jmva.variate2009.02.006

Box, G., & Jenkins, G. (1970). Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden-Day, San Francis.

Esfanjir, A., & A., Rezaei R, H. (1399). Investigating the effect of women's employment on economic growth in selected countries of Middle East. *Quarterly Journal of Woman and Society. 11,207-226. [In Persian]*

Faryaar, H., Macdonald, R., & Watt, J. (2022). Improving the measurement of the contribution of Women to the economy: Estimates of GDP. *Economic analysis division at statistics Canada.36, 28-001*. doi.org/10.25318/36280001202201000003-eng

Genton, M. G. (2004). Skew-elliptical distributions and their applications. A journey beyond normality. Edited volume, Bica Raton. Chapman & Hall.

Ghasami, S., Khodadadi, Z., & Maleki, M. (2019). Autoregressive processes with generalized hyperbolic innovations. *Communication in Statistics- Simulation and Computation.49(12).* doi.org /10.1080/ 03610918.2018. 1535066

Gupta, A., & Chang, C. (2002). Multivariate Skew-symmetric Distributions. *Applied mathematics Letters16(5)*, 634-646. doi.org/10.1016/S0893-9659(03)00060-0

Heidari, H. (2011). An alternative model for forecasting Iranian inflation: An application of bewley transformation. *Iranian Journal of Economic Research*, *46,* 77-96. [In Persian]

Khorsandi, M., Mohammadi, T., Arab, H., & Sakhaei, E. (2022*)*. The effect of external economic shocks on Iran's macroeconomic variable: Global VAR approach. *Iranian Journal of Economic Research.27. 9- 50.* [In Persian]

Kilian, L., & Lütkepohl, H. (2017). Structural vector autoregressive Analysis. (Themes in Modern Econometrics), Cambridge, United Kingdom.

Koop, G., & Korobilis, D. (2009). Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics. *Foundation and Trends in Econometrics. 3*, *267-351*. doi.org/10.1561/0800000013

Liu, J., Kumar, S., & Palomar, D. (2019). Parameter Estimation of Heavy-Tailed AR Model with Missing Data via Stochastic EM. *IEEE Transaction on Signal Processing. 67(8)*, 2159- 2172. doi.org/10.1109/ TSP.2019. 2899816

Liu, Y., Sang, R., & Liu, Sh. (2016). Diagnostic analysis for a vector autoregressive model under Student's t- Distributions Statistic. *Neerlandica.71(2), 86- 114*. doi.org/ 10.1111/stan.12102

Lütkepohl, H. (1991). Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer-Verlag. Berlin and New York.

Lütkepohl, H. (2005). New Introduction to Multiple Time Series Analysis . Springer Science & Business Media.

Lütkepohl, H. (2020). Structural vector autoregressive models with more shocks than Variables identified via hetrosedasticity. *Economics*

Letters. 195. 19510458. doi.org /10.1016/j.econlet.2020.109458

Mardia, K. (1970). Measure of multivariate skewness and kurtosis with application. *Biometrika, 36,* 519-530.

Mardia, K. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhy-a, ser. B. 36,* 115–128.

Maleki, M., Wraith, D., Mahmoudi, R., & Javier, E. (2019). Asymmetric heavy-tailed vector auto-regressive processes with application to financial data. *Journal of Statistical Computation and Simulation,90(2),*324-340. doi.org/10.1080/ 00949655. 2019.168067

Mirzaei, H., Razban, N., Mohammadi, T., & Morovat, H. (2023). Analyzing the housing market network among Iran's. *Provinces: New evidence through variance decomposition of dorecast errors.88, 120-157.*

Mohammadi, T., Azizkhani, F., Taei, H., & Javid, B. (1398). Macroeconomic dynamics of deregulation in product markets and work in Mena countries: Panel VAR. *Iranian Journal of Economic Reasearch.80, 37-67.*

Neethling, A., Ferreira, J., & Naderi, M. (2020). Skew Generalized Normal innovations for AR(p) process Endorsing Asymmetry. *Symmetry.12(8),1253*. doi.org /10.3390/sym12081253

Ni, Sh., & Sun, D. (2005). Bayesian estimates for Vector autoregressive. *Journal of Business and Economic Statistics. 23.105-117.* doi.org /10.1198/073500104000000622.

Pourahmadi, M. (2001). Foundation of Time Series Analysis and Prediction Theory; John Wiley & Sons, Inc: Hoboken, NJ, USA.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Ann Stat:461–464.* doi.org /10.1214/aos/ 117634 4136

Sims, C. (1980). Macroeconomic and reality. *Econometric. 48, 1-48.*

Stock, James H., & Watson, Mark W. (2001). Vector autoregressive. *Journal of Economic Perspectives. 15(4), 101-115***.** doi.org /10.1257/jep.15.4.10

Sharafi, M., & Nematollahi, A. (2016). AR (1) model with skew-normal innovations. *Metrika. 79, 1011–1029.* doi.org /10.1007/s00184-016-0587-7.

Sujit, S., Dipak, D., & Marco, B. (2003). A new class of multivariate distributions with applications to Bayesian regression models. *Canadian Journal of Statistics.129(31), 129-150.* doi.org /10.2307/3316064

Tarami, B., & Pourahmadi, M. (2003). Multi-variate t autoregressive: innovations, prediction variances and exact Likelihood equations. *Journal of Time Series Analysis. 24, 739-754.* doi.org / 10.1111/j.1467- 9892. 2003.00332.x

Tsay, RS. (2002). Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-41544-8

Tsung, L. (2009). Maximum likelihood estimation for multivariate skew normal mixture models. *Journal of Multivariate Analysis 100(2),* 257-265. doi.org/10.1016/j.jmva.2008.04.010

Tsung, L., Hsiu, H., & Chiang, Chen. (2009). Analysis of multivariate Skew normal models with incomplete data. *Journal of Multivariate Analysis.100, 2337-2351.* doi.org/10.1016/j.mva.2009.07.005

Zamani Mehryan, S., & Sayyareh, A. (2015). Statistical inference in autoregressive models with Non-negative residuals. *statistical research and training center, Iran JSRI 2015. 12(1), 83-104.*

Wai, C., Mumtaz, H., & Pinter, G. (2017). Forecasting with VAR models: Fat tails and stochastic volatility. *International Journal of Forecasting, 33(4), 1124-1143.* *doi.org/ 10.1016/j.ijforecast.2017.03.001*

Wei, W. (2006). Time series analysis univariate and multivariate methods. Boston, Pearson Addison Wesley.