

## مدل‌سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت

دکتر عبدالساده نیسی\*

تاریخ پذیرش: ۹۰/۲/۲۰

تاریخ دریافت: ۸۹/۱۰/۱۱

در این مقاله در نظر داریم بازارهای سهام و مشتقات را با ایده گرفتن از پژوهش‌های روز دنیا به گونه‌ای مدل‌سازی کنیم که قابل تعمیم در ایران بوده و برخی از ناکامی‌های بازار را تشریح بکنند. برای این منظور ابتدا با استفاده از خواص فرایند مارکوف و مفهوم رژیم‌های اقتصادی، رفتار قیمت دارایی پایه (سهام) را با رژیم-سوئیچینگ دینامیکی مدل‌سازی می‌کنیم. سپس با بستن یک اختیار آمریکایی روی این دارایی، یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات به دست می‌آوریم. علاوه بر این با تاثیر ثمرات رفاهی عواید نفت در دارایی پایه، یک مدل پویا با بازده تغییرپذیری تصادفی برای دارایی پایه‌ی نفت به دست می‌آوریم که مدل قیمت اختیار وابسته به آن آتی نفت را قیمت‌گذاری می‌کند، همچنین با اعمال برخی تغییرات محیطی در مدل دارایی پایه‌ی نفت، مشتقات زمین‌های نفت خیز را مدل‌سازی می‌کنیم. از آنجا که هدف این مقاله معرفی مدل‌های نوین در بازارهای مالی بوده و نظر به اینکه این مدل‌ها تا کنون در ایران به کار گرفته نشده‌اند، لذا برخی از این مدل‌ها را با استفاده از روش‌های پیشرفته‌ی عددی و نرم افزار Matlab بر روی داده‌های چند کشور توسعه یافته اجرا می‌کنیم. با توجه به این که قیمت‌گذاری اکثر کمیت‌های مالی متاثر از بازارهای جهانی است، لذا برای اجتناب از تاثیر مستقیم این بازارها بر قیمت‌گذاری کمیت‌های مهمی مانند نفت لازم است که عنایت خاصی توسط نهادهای مسئول در این زمینه شود.

**واژه‌های کلیدی:** اوراق مشتقه، اختیارات آمریکایی، مشتقات نفت، ریاضیات مالی، مسایل مقدار اولیه و مرزی، تفاضلات متناهی، نرم افزار Matlab، مدل بلک-شولز، لم ایتو، حرکت براونی، ریسک و پرتفوی.

## ۱. مقدمه

برای پژوهشگران و تحلیل‌گران مالی، اقتصادی، حساب‌رسان و مدیران ریسک در سازمان‌های پولی و مالی، تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از اهمیت بالایی برخوردار است.

معمولاً در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از جمله اوراق قرضه، سهام و اوراق مشتقه بدون داشتن یک مدل ریاضی، اشتباهات ظریف، خطاهای غیر قابل تشخیص و سوء تفاهم‌هایی پیش خواهد آمد که هیچ کدام از گروه‌های تحلیل‌گر مالی و اقتصاددانان نمی‌توانند و نباید از آن چشم‌پوشی کنند. خوشبختانه اخیراً پژوهش‌گران و تحلیل‌گر مالی و ریسک با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته‌ی ریاضی و کمک ریاضی‌دانان و اقتصاددانان توانسته‌اند مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده، برخی از مشکلات بازار را حل کنند. مدل‌های طراحی شده بستگی به نوع بازار متفاوت هستند. برای مثال معمولاً بازار اوراق قرضه با معادلات دیفرانسیل معمولی، بازار سهام با معادلات دیفرانسیل تصادفی و برنامه ریزی تصادفی و بازار مشتقات با معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل جزئی تصادفی مدل‌سازی می‌شوند.

یکی از مشهورترین مدل‌ها در بازارهای مالی مدل بلک-شولز است. در حوزه‌ی مدل‌سازی‌های مالی، مدل بلک-شولز نقش مهمی در تعیین قیمت‌داری‌های پرمخاطره (دارای ریسک بالا) بازی می‌کند و شالوده‌ای برای بسیاری از چارچوب‌های مدل‌سازی قیمت اختیارات به‌شمار می‌رود<sup>۱</sup>. مفید بودن این مدل مشهور در مقام یک پایه‌ی تئوری در بازارهای مالی ثابت شده است، چرا که روش‌های بسته و تحلیلی زیادی برای قیمت بیشتر انواع اختیارات تحت این مدل وجود دارد که اکثر آنها به‌صورت یک تابع آماده در نرم‌افزار Matlab تعریف شده است. اما به‌رحال نشان داده شده است که این مدل در پیش‌بینی خصوصیات مهم مشاهده شده در درآمدهای داری‌ها و نوسانات ضمنی بازار ناتوان است. به‌همین دلیل استدلال‌های زیادی به توسعه‌ی مدل‌های جانشین معطوف و فعالیت‌هایی در این زمینه انجام شده است.

1. John C, John Wilmott and Derakhshan

## مدل سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت ۱۸۷

در مدل بلک - شولز قیمت دارایی پایه از فرایند حرکت براونی هندسی تبعیت می کند که در آن نوسانات و جابجایی قیمت دارایی ثابت فرض شده است، لذا به همین دلیل نمی تواند رفتار دینامیک یا تصادفی در تغییرات قیمت را پیش بینی یا توضیح دهد. در عوض، پژوهشهای اخیر بر روی مدل های غیرخطی نوسانات تصادفی متمرکز بوده است. مثلاً کامپولیتی و گروه پژوهشی اش<sup>۱</sup> بر روی خانواده ی جدیدی از مدل های انتشار پیوسته ی انتگرال پذیر مطالعه می کنند. یک دلیل اصلی برای مطالعه ی چنین مدل هایی، جایگزینی بازارهای کامل و دقیق با خصوصیات عدم تقارن (چولگی یا اثر لبخند) نوسانات ضمنی بازار است. با این استدلال و استدلال های دیگر معلوم می شود که مدل های پایه ای و حتی نوین در بازارهای مالی بسته به موقعیت جغرافیایی و زمانی باید تعمیم داده شوند تا بتوانند واقعیت جدید این بازارها را پوشش دهند. نظر به این که دست اندرکاران اکثر بازارهای مالی این اصل مهم را در دستور کار خود قرار داده اند و با توجه به تاثیر این بازارها بر قیمت گذاری کمیت های مهم مالی در ایران، در نظر داریم برخی از مدل های بازارهای سهام و مشتقات را که قابل بومی شدن در کشور بوده و برخی از واقعیت اقتصاد را توضیح می دهند را مورد مطالعه قرار دهیم. برای این منظور ابتدا مدل دارایی پایه را با اعمال رژیم های اقتصادی به یک مدل پویا تعمیم می دهیم. سپس با بستن یک اختیار آمریکایی روی این دارایی، یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات به دست می آوریم. سرانجام با تاثیر ثمرات رفاهی عواید نفت در دارایی پایه، یک مدل پویا با بازده تغییرپذیری تصادفی برای دارایی پایه ی نفت به دست می آوریم که مدل قیمت اختیار وابسته به آن آتی نفت را قیمت گذاری می کند، علاوه بر این با اعمال برخی تغییرات محیطی در مدل دارایی پایه ی نفت، مشتقات زمین های نفت خیز را مدل سازی می کنیم.<sup>۲</sup>

با این مقدمات مقاله را به شکل زیر سازماندهی می کنیم: در بخش دوم مسئله ی قیمت گذاری اختیارات آمریکایی با مدل دارایی پایه ی رژیم سوئیچینگ را مورد مطالعه قرار می دهیم. در بخش سوم مسئله ی آتی های نفت و مدل های پیش بینی قیمت زمین های نفت خیز را تشریح می کنیم. در بخش آخر برخی از مدل های مزبور را به روش های عددی و با استفاده نرم افزار Matlab برای داده های چند کشور اجرا می کنیم.

امید است که این نوشتار در درک مفاهیم پایه ای مدل سازی و ایجاد انگیزه برای تعمیم و بومی سازی این نوع مدل سازی در کشور، مفید فایده واقع بوده و مرجعی برای پژوهشگران در رشته های

1. G., Albaness, G., Campolieti, and R., Makarov

۲. درخشان، مسعود

مرتبط به ریاضیات، مهندسی، آمار و علوم رایانه‌ای که مایل به دانستن نحوه استفاده از مهارت‌های خود در علوم مالیه هستند نیز شود. همچنین مرجعی برای محققین اقتصادی و مالیه که خواهان آشنایی با روش‌های ریاضی و عددی در زمینه مالیه باشند.

## ۲. مسئله‌ی قیمت گذاری اختیارات با رژیم سوئیچینگ

همان‌گونه که در مقدمه‌ی این مقاله و نوشته‌های دیگر پژوهشگران مالی بیان شده است، مدل بلک-شولز بر مفروضاتی استوار است که محدودیت‌هایی در بازار ایجاد می‌کند. یکی از این محدودیت‌ها، مدل دارایی پایه بوده که در آن تغییرپذیری و جابجایی ثابت فرض شده است، به همین دلیل نمی‌تواند رفتار دینامیک یا تصادفی بازار را توضیح دهد. در این بخش در نظر داریم این محدودیت را با استفاده از فرایند تصادفی مارکوف چند حالتی رفع کنیم و یک مدل قابل قبول برای دارایی پایه با استفاده از رژیم‌های اقتصادی پیشنهاد کنیم. البته این نکته را یادآور می‌شویم که اگرچه این مدل به واقعیت اقتصاد کشورمان نزدیکتر بوده، اما ممکن است به کارگیری آن به صورت محض برای همه‌ی دارایی‌های پایه در هر زمان مفید واقع نشود، بلکه باز قابل تعمیم بوده و می‌توان آن را در زمان‌های آتی نیز تغییر و تعمیم داد.

### ۲-۱. تعمیم مدل دارایی پایه به مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف

یک زنجیر مارکوف این خاصیت پایه را دارد که فرایند آن تنها به مقدار مشاهده شده‌ی پیشین وابسته است و از دیگر عوامل گذشته مستقل است. چندین مزیت مهم در استفاده از مدل‌های مارکوف وجود دارد. یکی از این مزایا آن است که در اغلب فرایندها به دلیل عدم وابستگی بین وضعیت کنونی و تاریخ گذشته‌ی آن، به راحتی می‌توان تابع چگالی الحاقی را تعبیر نمود، بنابراین ماتریس انتقال برای این فرایند، بعد از چندین نقطه‌ی زمانی دستیافتنی خواهد شد. با اعمال این احتمالات شرطی انتقال، می‌توان چگالی احتمال یک فرایند با زنجیره مارکوف پنهان را به صورت صریح به دست آورد. در پژوهش دایوم<sup>۱</sup> یک مدل سوئیچینگ مارکوف برای قیمت گذاری اختیارات در یک آهنگ زمانی گسسته مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده است که مدل سوئیچینگ مارکوف می‌تواند رفتار رژیم‌های نوسان‌پذیری را توضیح دهد. اکنون دلایل زیر را برای انتخاب رژیم‌های متفاوت برای نوسان‌پذیری مطرح می‌کنیم:

1. Jin-Chuan Duan, Ivilina Popova and Peter Ritchken

## مدل سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت ۱۸۹

**دلیل اول:** رژیم‌های نوسان‌پذیر فاکتورهای ذاتی مهمی در اقتصاد هستند. آنچه که در این فرآیند مشاهده می‌شود، تغییرات متفاوت در نرخ بازدهی دارایی‌های مالی در طی بازه‌های زمانی معین است.

معمولاً چندین رژیم برای تغییرات نوسان‌پذیری در نظر گرفته و نشان داده می‌شود که نوسان-پذیری بالاتر به تغییرات بزرگتر در ارزش دارایی‌ها منجر می‌شود. لذا در نظر گرفتن بیش از یک رژیم برای نوسان‌پذیری واقعیت بهتری از اقتصاد را نشان می‌دهد.

**دلیل دوم:** در یک بازار، میانگین و واریانس قیمت بازار یا نرخ بازده به‌طور معمول وابسته به زمان است. بنابراین در کار مدل‌سازی مالی، ایده‌ی خوبی نخواهد بود که همیشه نرخ ثابتی برای انتشار فرض شود. لذا بایستی حداقل تعداد قابل توجهی از رژیم‌های انتشار در نظر گرفته شوند تا رفتار واقعی یک بازار مالی قابل پیش‌بینی یا توضیح باشد.

**دلیل سوم:** در یک اقتصاد معمولاً دو چرخه‌ی کسب و کار متمایز وجود دارد، یعنی انبساط و انقباض. در چرخه‌ی انبساط سرمایه‌گذار انتظار بازدهی بالاتری از دارایی‌ها دارد، از سوی دیگر، در طی یک دوره‌ی انقباض اقتصادی، نرخ بازدهی سرمایه‌ها کاهش می‌یابد، همچنین ریسک بازار معمولاً با واریانس استاندارد قیمت بازار سنجیده می‌شود، لذا مهم است که نوسان‌پذیری را برای دوره‌های مختلف چرخه‌ی کسب و کار در نظر بگیریم که در این صورت فرض می‌شود که سوئیچینگ بین این دو نوع دوره‌ی کسب و کار در فضای مارکوف است.

با این توضیحات، روند اصلی مورد نظر ما در این بخش به کارگیری یک فرآیند سوئیچینگ مارکوف در مدل دارایی پایه به شکل زیر است:

بازار مالی را در نظر بگیرید که در آن  $M$  وضعیت اقتصادی مطرح باشد. لذا در این بازار نوسان‌پذیری و جابجایی دارایی پایه می‌توانند مقادیر مختلف در رژیم‌های متفاوت اختیار کنند. برای توصیف و مدل کردن این بازار زنجیر مارکوف زمان پیوسته‌ی  $\varepsilon_t$  با تعداد  $M$  وضعیت را در نظر می‌گیریم. پس مدل دارایی پایه در این بازار به صورت زیر تعمیم پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_{\varepsilon_t} dt + \sigma_{\varepsilon_t} dW_t \quad 0 < t < T$$

که در آن  $dW_t$  فرایند براونی استاندارد،  $S_t$  دارایی پایه،  $\sigma_{\varepsilon_t}$  نوسان‌پذیری دارایی پایه و  $\mu_{\varepsilon_t}$  جابجایی نرخ بهره‌ی بدون ریسک است. همچنین  $\sigma_{\varepsilon_t}$  و  $\mu_{\varepsilon_t}$  به زنجیر مارکوف  $\varepsilon_t$  بستگی داشته که می‌تواند مقادیر مختلف در رژیم‌های متفاوت اختیار کنند. مدل فوق را مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف می‌گوییم.

**بومی‌سازی:** از آنجا که عوامل زیادی می‌توانند در اقتصاد کشور ما مؤثر باشند، مثلاً وقتی قیمت سکه در فروردین ۱۳۹۰ به صورت جابی بالا رفت یا قیمت دلار در اسفند ۱۳۸۹ به صورت غیر واقعی افزایش یافت، بانک مرکزی وارد عمل شد و با اتخاذ سیاست جدیدی قیمت را پایین آورد، چنین سیاست‌هایی را می‌توان با استفاده از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف بیان کرد، لذا با داشتن مدلی مانند فوق این امکان بوجود می‌آید که به توانیم بازار را به صورت خودکار در مواقع بحرانی سوئیچ دهیم، همچنین می‌توان با اضافه کردن جمله‌ی پرش به این مدل لبخند زنی بازار را نیز توضیح داد.

## ۲-۲. مدل اختیارات، تحت دارایی پایه با مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف

در اینجا در نظر داریم سبده‌ی از بازار سهام و بازار اختیارات که دارایی پایه‌ی آن از مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف تبعیت می‌کند را مدل‌سازی کنیم. برای این منظور فرض کنید  $u_k = u_k(S_t, t)$  قیمت یک برگه‌ی اختیار به ازای رژیم  $k (k = 1, 2, \dots, M)$  باشد. اکنون بنابر اصل ریسک خنثی، لم ایتو، قضیه‌ی فایمن-کاتس و یک سری محاسبات سنگین ریاضی می‌توان نشان داد که قیمت این برگه در معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند<sup>۱</sup>:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_k^2 S^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial S^2} + r_k S \frac{\partial u_k}{\partial S} - r_k u_k + \sum_{j=1}^M q_{kj} (u_j - u_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, M$$

که در آن  $q_{kj}$  درایه‌های ماتریس وضعیت مارکوف است. بدین ترتیب یک برگه‌ی اختیار با  $M$  رژیم، با  $M$  معادله دیفرانسیل جزئی مدل می‌شود، همچنین مدل فوق فقط در عبارت  $\sum_{j=1}^M q_{kj} (u_j - u_k)$  با مدل استاندارد بلک-شولز متفاوت است و اگر دارایی پایه با یک رژیم مدل شود، یعنی  $M = 1$ ، آنگاه داریم:

$$\sum_{j=1}^1 q_{kj}(u_j - u_1) = q_{11}(u_1 - u_1) = 0$$

لذا به مدل استاندارد بلک-شولز می‌رسیم. به هر حال قیمت برگه‌های اختیار با دارایی پایه‌ی  $M$  رژیمی در معادلات فوق صدق می‌کند و برای تعیین قیمت این نوع برگه‌ها باید اطلاعات مهم دیگری از قبیل شرایط اولیه، مرزی و نوع اختیار موجود باشد. برای نمونه در صورتی که برگه‌ی اختیار از نوع آمریکایی باشد، آنگاه به علت پویایی این نوع برگه‌ها که در هر زمان قبل از سررسید قابل اجرا گذاشتن است، مدل با کمی پیچیدگی‌های بیشتر نسبت به نوع اروپایی همراه می‌شود و به دلیل اینکه اختیارات آسیایی بیشتر به اختیارات آمریکایی شبیه هستند، ما در نظر داریم اختیارات آمریکایی را مدل کنیم تا بومی‌سازی کردن آنها برای دیگر محققین مالی در ایرن راحت‌تر باشد. اکنون بدون پرداختن به جزئیات، می‌توان نشان داد که قیمت یک برگه‌ی اختیار فروش آمریکایی،  $u_k = u_k(S, t)$ ، با دارایی پایه‌ی  $S_t$ ، که از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف معرفی شده در فوق تبعیت می‌کند، در مدل زیر صدق می‌کند<sup>۱</sup>:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_k^2 S^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial S^2} + r_k S \frac{\partial u_k}{\partial S} - r_k u_k + \sum_{j=1}^M q_{kj}(u_j - u_k) = 0, \text{ اگر } S > \bar{S}_t(t)$$

$$u_k(S, t) = K - S, \text{ اگر } 0 \leq S \leq \bar{S}_t(t)$$

$$u_k(S, T) = \max\{K - S, 0\}$$

$$u_k(\bar{S}_k(t), t) = K - \bar{S}_k(t),$$

$$\frac{\partial u_k(\bar{S}_k(t), t)}{\partial S} = -1$$

$$\lim_{S \uparrow \infty} u_k(S, t) = 0,$$

$$\bar{S}_t(T) = K,$$

که در آن  $K$  قیمت توافقی،  $\bar{S}_t(t)$  کرانه‌ی سررسید،  $r_k$  نرخ بهره‌ی بدون ریسک و  $\sigma_k$  نوسان‌پذیری رژیم  $k$  ام می‌باشند.

در ادبیات معادلات دیفرانسیل جزئی به مساله‌ی فوق، مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد می‌گویند. این‌گونه مسایل دارای روش‌های حل پیچیده‌ای می‌باشند و محققین ریاضی، مقالات زیادی برای حل این‌گونه مسایل در حالت‌های خاص به چاپ رسانده‌اند. این مقاله یک روش عددی نوین در بخش چهارم برای حل این مساله ارائه کرده است.

### ۳. مبانی مدل‌سازی مشتقات نفت

در این بخش نشان می‌دهیم که با کمی تغییرات در مدل دارایی پایه، علاوه بر حذف برخی از محدودیت‌های بازارهای مالی به کاربردهای مهم و جالب در مشتقات صنعت نفت می‌رسیم که در زیر دو مساله‌ی روز و مهم در این زمینه را مدل‌سازی می‌کنیم. اهمیت این بخش به اندازه‌ای است که می‌توان مدل دارایی پایه‌ی بخش ۲ را با این مدل‌ها ترکیب کرده، یک مدل کارا و نوین برای مشتقات صنعت نفت کشور ارائه نمود.

#### ۳-۱. مدل‌سازی قیمت‌های آتی‌های نفت

همان‌گونه که در بخش‌های قبلی این مقاله اشاره شد، مدل دارایی پایه برای مشتقات به صورت زیر است:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad 0 < t < T$$

که در آن ضرایب  $\mu$  و  $\sigma$ ، ثابت فرض می‌شوند. در سال ۱۹۹۷ شوارتز با اعمال اثرات ثمرات رفاهی در این ضرایب و دینامیکی کردن آنها، مدل‌های زیر را برای دارایی پایه‌ی و آتی‌های نفت پیشنهاد کرد:

فرض کنید  $\delta$  ثمرات رفاهی آتی‌های نفت بوده که به صورت تصادفی با مدل زیر بیان می‌شود<sup>۱</sup>:

$$d\delta = \alpha(\gamma_p - \delta) dt + \sigma_\delta dW_\delta$$

همچنین فرض کنید  $\gamma_T$  ثمرات رفاهی بلند مدت نفت باشد، یعنی افزایش قیمت نفت به اضافه‌ی ثمرات رفاهی، آنگاه دینامیک قیمت دارایی پایه‌ی نفت، به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

1. G., Cortazara , E. S., Schwartz



$$\frac{dS}{S} = (\gamma_T - \delta) dt + \sigma_r dW_r$$

که در آن  $\alpha$  ضریب ثمرات رفاهی،  $\gamma_p$  ثمرات رفاهی بلند مدت و  $dW_1$  و  $dW_2$  فرایندهای استاندارد وینر برای ثمرات رفاهی،  $\delta$ ، و دارایی پایه‌ی  $S$ ، با ضریب همبستگی  $\rho$  می‌باشند، یعنی:

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

برای بیان مدل‌های ثمرات رفاهی نفت و دارایی پایه، شوارتز در سال ۱۹۹۷ بازده کل بلند مدت روی نفت،  $\gamma_T$ ، را با  $r$  جابه‌جا کرد و در نهایت قیمت بازار را از ریسک ثمرات رفاهی ناشی از جابجایی مورد انتظار یعنی  $\lambda$  کم کرد و به مدل زیر رسید:

$$d\delta = [\alpha(\gamma_p - \delta) - \lambda] dt + \sigma_1 dW_1 \quad \text{مدل ثمرات رفاهی نفت}$$

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta) dt + \sigma_r dW_r \quad \text{مدل دارایی پایه‌ی نفت}$$

تفاوت این مدل با مدل دارایی پایه‌ی حرکت براونی هندسی در این است که در اینجا ضریب  $dt$  ثابت نبوده و تغییرات تصادفی دارد، لذا نباید انتظار داشت که قیمت یک مشتقه که روی این دارایی پایه بسته می‌شود در معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز صدق کند. اکنون با اعمال تغییرات تصادفی بودن ضریب  $dt$  در روند مدل‌سازی و بدون پرداختن به جزئیات می‌توان نشان داد که قیمت یک آتی‌های نفت،  $V = V(S, \delta, t)$ ، با دارایی پایه‌ی  $S$ ، که از فرایند فوق تبعیت می‌کند، در معادله‌ی دیفرانسیل جزئی<sup>۱</sup>:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} + \sigma_1 \sigma_r \rho S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \delta} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + [\alpha(\gamma_p - \delta) - \lambda] \frac{\partial V}{\partial \delta} - \frac{\partial V}{\partial T} = 0, \quad S > 0$$

همراه با شرط مرزی:

1. G., Cortazar, E. S., Schwartz

$$V(S, \delta, T = 0) = S$$

صدق می‌کند.

مساله‌ی فوق یک مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی بوده و برای حل آن نیاز به پیش زمینه‌های بالای ریاضی دارد، در این مقاله در نظر نداریم جزییات روش‌های حل را بیان کنیم، بلکه به ارایه‌ی یک روش عددی در فصل چهار اکتفا می‌کنیم.

**بومی‌سازی:** برای توسعه و بومی سازی مدل فوق می‌توان از یک مدل دو یا سه عاملی برای قیمت آتی‌های نفت ایران استفاده کرد، که به نظر می‌رسد این گونه مدل‌ها داده‌ها را خیلی خوب تطبیق می‌دهند. علاوه بر این می‌توان یک روش حل عددی پیشنهاد داد که به کمک آن می‌توان مدل مذکور را شبیه‌سازی کرد. توجه شود که مدل‌های چند عاملی باعث می‌شوند که کاربردهای عملی در ارزش‌گذاری و پوشش حقیقی و ادعاهای مشروط مالی نفت را پوشش دهند.

### ۲-۳. مدل سازی قیمت‌گذاری زمین نفت خیز

در این بخش در نظر داریم قیمت زمین نفت خیز توسعه نیافته را مشروط بر قیمت نقدی نفت، مدل‌سازی کنیم. اگر چه چنین مسایلی بیشتر در کشورهایی مثل آمریکا کاربرد دارند، اما بومی کردن چنین مساله‌ای برای زمانی که بخواهیم برخی از سهم‌های زمین‌های نفت خیز را در بورس ارایه کنیم مفید است.

برای این منظور ابتدا یک مدل برای قیمت نقدی نفت با ریسک تعدیل شده معرفی می‌کنیم، سپس زمین نفت خیز را به‌عنوان یک مشتقه در سه مرحله‌ی زیر مدل‌سازی می‌کنیم:

مرحله‌ی اول مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز قبل از واگذاری برای توسعه، مرحله‌ی دوم مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز در جریان توسعه است و مرحله سوم مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز در هنگام تولید می‌باشد.

### ۱-۲-۳. مدل دارایی پایه‌ی نفت برای قیمت‌گذاری زمین نفت خیز

فرض کنید  $S$ ، قیمت نقدی نفت،  $\bar{K}$ ، میانگین بلند مدت قیمت واحد نفت،  $\beta$ ، پارامتر بازگشت به میانگین،  $r$ ، نرخ بهره‌ی بدون ریسک، که ثابت فرض می‌شود،  $C$ ، میانگین ثمرات رفاهی به ازای داشتن یک واحد از نفت،  $\sigma$ ، نوسان‌پذیری آنی از بازده‌ها به ازای داشتن یک واحد از نفت

و  $dW$ ، نموهای فرایند گاوسی-وینر استاندارد می‌باشند، آنگاه بنا بر اصل بازگشت به میانگین در قیمت‌ها و با استفاده از متغیر ثمرات رفاهی، مدل قیمت دارایی پایه به صورت زیر بیان می‌شود<sup>۱</sup>:

$$\frac{dS}{S} = (r - C - \beta(\bar{S} - S)) dt + \sigma dW$$

### ۲-۲-۳. مدل قیمت یک زمین نفت خیز

اکنون برای هر سه مرحله‌ی معرفی شده در فوق قیمت زمین نفت خیز را مدل سازی می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید  $H(S, T^i)$ ، ارزش زمین نفت خیز قبل از واگذاری برای توسعه،  $U(S, T^d)$ ، ارزش زمین نفت خیز در جریان توسعه است،  $U(S, Q)$  ارزش زمین نفت خیز در هنگام تولید،  $T^i$ ، زمان باقیمانده تا سررسید از اختیار توسعه،  $T^d$ ، زمان باقیمانده تا سرمایه گذاری کامل،  $Q$ ، ذخیره باقیمانده نفت،  $I$ ، ارزش فعلی سرمایه گذاری توسعه در مرحله‌ی دوم،  $S_{ci}^*$ ، قیمت نقدی بحرانی نفت،  $R$ ، مالیات‌ها: نرخ حق الامتیاز،  $crop$ ، مالیات‌ها: نرخ مالیات بر درآمد شرکت و  $\lambda$ ، بیمه‌ی ریسک کشور می‌باشند. با این نماد گذاری مدل‌ها را در سه مرحله‌ی زیر معرفی می‌کنیم.

### ارزش یک زمین نفت خیز در مرحله ۳

فرض کنید استراتژی قیمت گذاری به این صورت است که سرمایه گذاری که یک قرارداد آتی‌ها را نگه می‌دارد که به شخص دیگری زمین نفت خیز را در این مرحله قرض می‌دهد و مقدار نقدی  $M$  را دریافت می‌کند. در این صورت، اگر یک سرمایه گذار یک موقعیت خرید در زمین نفت خیز بگیرد و به تعداد  $\frac{H_S}{F_S}$  موقعیت فروش در قرارداد آتی‌ها داشته باشد، او ریسکش را پوشش می‌دهد و بایستی بازده‌ای برابر با نرخ بهره‌ی بدون ریسک به اضافه حق بیمه‌ی ریسک وابسته به کشور که زمین نفت خیز در آن قرار دارد، به دست آورد. در نتیجه مدل قیمت زمین نفت خیز در مرحله ۳ در معادله دیفرانسیل جزئی زیر<sup>۲</sup>:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - q_d V_Q + M + (r - C - \beta(\bar{S} - S)) S \frac{\partial V}{\partial S} - (r + \lambda) V = 0$$

1. G., Cortazar, E. S., Schwartz

2. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz

همراه با شرط مرزی:

$$V(S, 0) = 0$$

و شرایط:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\infty, Q) = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(0, Q) = 0$$

صدق می‌کند که در آن  $q_d$ ، نرخ تولید سالانه در این مرحله است.

### ارزش یک زمین نفت خیز در مرحله ۲

با استدلال‌هایی مشابه فوق می‌توان نشان داد که ارزش زمین نفت خیز در این مرحله در معادله دیفرانسیل جزئی<sup>۱</sup>:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - U_{T^d} + (r - C - \beta(\bar{S} - S)) S \frac{\partial U}{\partial S} - (r + \lambda) U = 0$$

همراه با شرط اولیه و کرانه‌ای زیر است:

$$U(S, 0) = V(S, Q)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(0, T^d) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\infty, T^d) = 0$$

شرایط فوق به این معنی است که زمانی که توسعه کامل شد ارزش زمین نفت خیز بایستی برابر با

ارزش زمین نفت خیز در مرحله ۳ با ذخیره‌ی  $Q$  باشد.

### ارزش یک زمین نفت خیز در مرحله ۱

بالاخره ارزش زمین نفت خیز توسعه نیافته در اقتصاد بدون فرصت آریتراز بایستی در معادله

دیفرانسیل جزئی<sup>۲</sup>:

1. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz

2. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} - H_{T^d} + (r - C - \beta(\bar{S} - S)) S \frac{\partial H}{\partial S} - (r + \lambda) H = 0$$

همراه با شرایط اولیه و کرانه‌ای زیر صدق کند:

$$H(S, 0) = \max(U(S, T^d) - I, 0)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}(0, T^i) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}(\infty, T^i) = 0$$

شرایط فوق به این معنی است که زمانی که زمان موجود برای آغاز توسعه به اتمام رسید، ارزش زمین نفت‌خیز توسعه‌نیافته وابسته خواهد بود به اینکه آیا برای مالکک بهین خواهد بود که یک سرمایه‌گذاری توسعه را بوجود بیاورد و یک زمین نفت‌خیز در مرحله‌ی ۲ را به دست آورد، و یا امتیاز انحصاری را واگذار کند.

#### ۴. روش‌های حل مدل‌های مالی

همان‌گونه که در بخش‌های قبل توضیح دادیم، مدل دارایی پایه با معادلات دیفرانسیل تصادفی و مدل مشتقات مالی با معادلات دیفرانسیل جزئی بیان می‌شوند. از آنجا که تجزیه و تحلیل این مدل‌ها بدون شناخت دقیق و کامل این معادلات امکان‌پذیر نبوده، لذا تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل جزئی از اهمیت ویژه‌ای در بازارهای مالی پیدا می‌کنند، بر همین اساس نوشته‌های زیادی در دهی اخیر تحت عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل جزئی در مالی به چاپ رسیده و توجه دانشمندان زیادی را به این موضوع جلب کرده شده است. ما در این بخش در نظر نداریم تمام روش‌های حل را با جزییات توضیح دهیم بلکه به آرایه‌ی روش‌های عددی برای چند مدل آرایه شده در فوق می‌پردازیم<sup>۱</sup>.

#### ۴-۱. کارایی روش‌های عددی

اکثر مدل‌های مالی تحت شرایطی ساخته می‌شوند که گاهی این شرایط با واقعیت تطابق ندارند، برای نمونه در مدل حرکت براونی برای پیش‌بینی قیمت سهام، تغییر پذیری،  $\sigma$ ، ثابت فرض شده

1. Abdolsadeh Neisy, G. D., Smith

است، حال اگر تاریخ سررسید پنج سال فرض شود، آنگاه فرض ثابت بودن تغییر پذیری سهام در طول این مدت منطقی به نظر نمی‌رسد. برای رفع این مشکل دو روش پیشنهاد می‌شود، روش اول استفاده از مدل‌های نوین مالی و روش دوم استفاده از روش‌های حل مناسب و کارا مانند روش‌های عددی می‌باشد. از آنجا که روش‌های عددی بر افراز بازه‌ی زمانی  $[0, T]$  به بازه‌های کوچکتر استوار است، لذا فرض ثابت بودن برخی پارامترهای مالی مانند تغییرپذیری در دوره‌ی زمانی کوچک‌تر مثل یک هفته یا چند روز منطقی‌تر از کل دوره تا تاریخ سررسید است، علاوه بر این اکثر مواقع قیمت در تمام زمان‌های بین  $[0, T]$  لازم نبوده و هدف داشتن قیمت در زمان‌های متناهی در این بازه است که این کار با پیاده سازی روش‌های عددی امکان‌پذیر است. با این استدلال و توجه به اینکه اکثر مدل‌های مالی به دلیل پیچیدگی و داشتن جمله‌ی تصادفی جواب تحلیلی و بسته ندارند، ما روش‌های عددی را برای حل پیشنهاد می‌کنیم.

#### ۴-۲. روش‌های عددی پیش‌بینی شاخص و قیمت دارایی پایه

در این بخش در نظر داریم با استفاده از نرم افزار Matlab و روش‌های عددی، یک روش برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی در حالت کلی زیر که در مدل‌های دارایی پایه بسیار کاربرد دارد، ارائه دهیم:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad 0 < t < T$$

برای این منظور بازه‌ی زمانی  $[0, T]$  را به  $n$  زیر بازه کوچک  $[t, t + \Delta t]$  افراز کرده مشتقات را با یک روش تفاضلی مثلاً پیشرو یا پسرو تقریب می‌زنیم، سپس با به کار گیری خاصیت فرایند وینر،  $dW_t$ ، برای زمان‌های بسیار کوچک  $\Delta t$  به صورت زیر<sup>۱</sup>:

$$W(t + \Delta t) - W(t) = \Delta W(t) = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad \varepsilon \sim N(0, 1)$$

1. Bernt Oksendal

## مدل سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت ۱۹۹

معادله دیفرانسیل تصادفی را به معادله تفاضلی تبدیل می کنیم، در نهایت با استفاده از شیبه سازی مونت کارلو و نرم افزار Matlab مسیرهای پیش بینی قیمت را تعیین می کنیم. برای روشن شدن مطلب، دو مساله را در زیر به روش های عددی حل می کنیم:

### مساله ی مقایسه ی شاخص های هشت کشور

بدون نوشتن محاسبات ریاضی، دستورات زیر را برای پیش بینی شاخص دارایی چهار کشور اروپایی، کشورهای ژاپی، کانادا و آمریکا از تاریخ 07-Feb-2001 تا تاریخ 24-Apr-2006 به کار می بریم:

```
load SDE_Data, SDE_Data
```

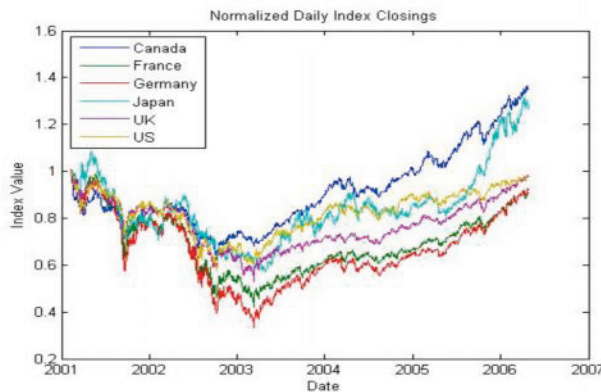
دستور فوق داده های تصادفی هفت کشور را به صورت زیر تعریف می کند:

```
SDE_Data =  
  Dates: [1359x1 double]  
  Canada: [1359x1 double]  
  France: [1359x1 double]  
  Germany: [1359x1 double]  
  Japan: [1359x1 double]  
  UK: [1359x1 double]  
  US: [1359x1 double]  
  Euribor3M: [1359x1 double]
```

مجموعه دستورات زیر، داده های ساخته شده در فوق را پس از شاخص گذاری و محاسبه فرایند قیمت شان رسم می کنند:

```
fields = fieldnames(SDE_Data);  
nIndices = numel(countries);  
countries = fields(2:end-1);  
prices = [SDE_Data.Canada SDE_Data.France SDE_Data.Germany  
  SDE_Data.Japan SDE_Data.UK SDE_Data.US];  
yields = SDE_Data.Euribor3M;  
yields = 360 * log(1 + yields);  
plot(SDE_Data.Dates, ret2price(price2ret(prices))), datetick('x')  
xlabel('Date'), ylabel('Index Value'), title ('Normalized Daily Index  
  Closings')  
legend(countries, 'Location', 'NorthWest')
```

با اجرای دستورات فوق در نرم افزار Matlab خواهیم داشت:



دستورات فوق را می‌توان برای داده‌های هر چند کشور دیگر به کار برد.

#### مساله پیش‌بینی قیمت سهام

فرض کنید فرایند قیمت سهام از مدل حرکت براونی هندسی با قیمت اولیه \$ ۵۰، جابجایی ۱/۰ و نوسانات ۰/۳ تبعیت می‌کند، اکنون با به‌کارگیری روش‌های عددی و شبیه‌سازی مونت کارلو، کد برنامه نویسی Matlab زیر را برای رسم یک مسیر نمونه به کار برده می‌شود:

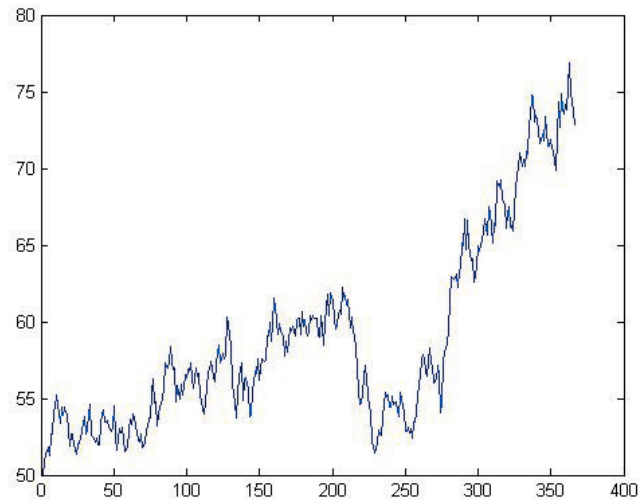
```

syms s mu sigma T NSteps N
s=50;mu=0.1;sigma=0.3;NSteps=365;T=1;N=3;
SPaths = zeros(N, 1+NSteps);
SPaths(:,1) = s;
dt = T/NSteps;
nudt = (mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt = sigma*sqrt(dt);
for i=1:N
    for j=1:NSteps
        SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp(nudt + sidt*randn);
    end
end
randn('seed',0);
plot(1:length(SPaths),SPaths(1,:))
    
```

نتیجه‌ی اجرای دستورات فوق در زیر آمده است:



## مدل سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت ۲۰۱



**بومی سازی:** در فوق دو مساله‌ی مهم به روش عددی حل و جواب آن‌ها با استفاده از نرم افزار Matlab پیاده سازی و رسم شد. از آنجا که مدل ارایه شده دارای حالت کلی بوده و با کمی تغییرات می‌توان آن را برای داده‌های هر کشوری پیاده سازی کرد، لذا می‌توان با اعمال برخی تغییرات در پارامترها، مدل‌های فوق را بومی سازی کرده و برای هر دارایی پایه از جمله نفت یا هر سهام در بازار بورس ایران به کار برد. علاوه بر این روش عددی فوق را می‌توان برای رژیم‌های متفاوت اقتصادی نیز به کار برد. پیشنهاد می‌شود که مدل را با تغییرپذیری و بازده جابجایی ثابت برای داده‌های شاخص چهار صنعت در بورس تهران پیاده سازی کرده، سپس مدل‌های تعمیم یافته را برای این داده‌ها اجرا کنید. علاوه بر این با داشتن داده‌های قیمت نفت، مدل‌های فوق را روی این داده‌ها امتحان کنید.

### ۳-۴. حل مدل اختیارات تحت دارایی پایه با مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف

بر اساس مدل سازی ارایه شده در بخش ۲.۲، قیمت یک برگه‌ی اختیار آمریکایی با دارایی پایه‌ای که از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف تبعیت می‌کند در یک مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی با  $M$

معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و  $M$  کران آزاد صدق می‌کند که این مساله جواب تحلیلی یا فرم بسته ندارد. لذا تلفیقی از تقریب عددی روش جریمه و تفاضلات متناهی را برای حل انتخاب می‌کنیم.<sup>۱</sup> ایده‌ی اصلی روش جریمه برای رفع شدن کران آزاد با اضافه کردن عبارت جریمه در معادله دیفرانسیل جزئی می‌باشد. برای تعمیم این ایده در سیستم رژیم سوئیچینگ، عبارت جریمه را به هر یک از  $M$  معادله دیفرانسیل جزئی اضافه می‌کنیم، سپس مساله را به یک سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی با حدود شرایط مرزی ثابت تبدیل می‌کنیم.

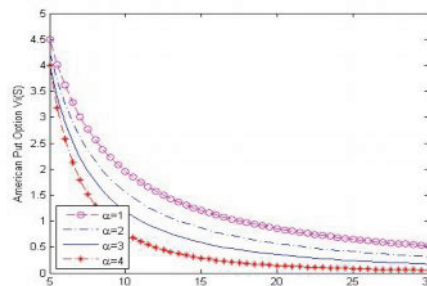
اکنون روش تفاضلات متناهی را می‌توان روی سیستم حاصل پیاده سازی کرد، برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم که  $S_\infty$  قیمت دارایی به قدر کافی بزرگ باشد، سپس

ناحیه‌ی  $[0, S_\infty] \times [0, T]$  را با انتخاب  $\Delta S = \frac{S_\infty}{M+1}$  و  $\Delta t = \frac{T}{N+1}$ ، به  $(N+1)(M+1)$  ناحیه‌ی کوچک افزایش کرده، قرار می‌دهیم:

$$V_i^{j,n} = V_i^\varepsilon \left( j\Delta S, n\Delta t \right), \quad 0 \leq j \leq M+1, \quad 0 \leq n \leq N+1, \quad 1 \leq i \leq m,$$

که در آن  $V_i^\varepsilon$  قیمت یک مشتقه به ازای رژیم  $i$ ام در نقاط گره‌ای  $(j, n)$  می‌باشد. حال مشتقات موجود در مساله‌ی اخیر را با استفاده از گسسته سازی مرکزی و کرانک-نیکلسون تقریب زده به یک سیستم معادلات خطی می‌رسیم که با استفاده از نرم‌افزار Matlab حل می‌شود.

روش فوق را برای یک اختیار آمریکایی اجرا کرده، بدون نوشتن روابط ریاضی، قیمت این اختیار را در زمان  $t=0$  به ازای چهار رژیم  $\alpha_0 = 1, 2, 3, 4$ ، برای  $S$ ‌های واقع در بازه‌ی  $[5, 30]$  رسم می‌کنیم:



## مدل سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت ۲۰۳

### ۴-۴. راهکاری برای اجرای مدل های آتی های نفت و مدل قیمت زمین نفت خیز

روش های عدد حل مساله ی مدل قیمت آتی های نفت شبیه روش ارایه شده در بخش ۳.۴ بوده، با این تفاوت که شرایط مرزی آزاد نیستند، لذا نیاز به روش جریمه نبوده و فقط روش تفاضلات متناهی کافی است. همچنین روش حل مساله ی زمین نفت خیز نیز به صورت فوق می باشد.

### ۵. نتیجه گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

همان گونه که در این مقاله اشاره شد، نحوه ی بومی سازی کردن در اکثر بخش ها آمده است، لذا پیشنهاد می شود ابتدا مدل های ارایه شده در این مقاله را برای داده های بازارهای مالی کشور مثلاً داده های شاخص یک یا چند صنعت در بازار بورس تهران را اجرا کنید، سپس بررسی کنید که آیا این مدل ها رفتار قیمت یا شاخص این داده ها را پوشش می دهند یا خیر. در صورت مثبت بودن مدل را جهت پیش بینی برای آینده استفاده کنید و اگر این گونه نباشد مدل را تعمیم داده روند فوق را اینقدر تکرار کنید تا به یک مدل قابل برای بازار مالی مثلاً سهام برسید. علاوه بر این ممکن است به جای تعمیم مدل با تعمیم روش حل مدل قابل قبول شود که این امر توسط محققین ریاضی کاربردی باید انجام گیرد که در این صورت یک خط مشی جهت تحقیق و تولید علم در این زمینه فراهم می گردد.

## منابع

### الف - فارسی

درخشان، مسعود (۱۳۸۳)، مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت، موسسه ی مطالعات بین المللی انرژی.

### ب - انگلیسی

- Albaness, G. and G. Campolieti (2005), *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management: Theory, Tools and Hands-on Programming Application Academic Press, Elsevier Science. USA.*
- Buffington, J. and R. J. Elliott (2002), "American Options With Regime Switching", *International Journal of Theoretical and Applied, Finance*, vol. 5, pp. 497-514.
- Campolieti, G. and R. Makarov (2006), *On Properties of Analytically Solvable Families of Local Volatility Diffusion Models.*

- Campolieti, G. and R. Makarov (2005), "Pricing Path-Dependent Options With a Bessel Bridge", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.
- Cortazar, G. and E. S. Schwartz (1997), "Implementing a Real Option Model for Valuing an Undeveloped Oil Field", *International Transactions in Operational Research*, vol. 4, pp. 125-137.
- Cortazara, G. and E. S. Schwartz (2003), "Implementing a Stochastic Model for Oil Futures Prices", *Energy Economics*, vol. 25, pp. 215-238.
- Duan, Jin-Chuan, Ivilina, Popova and Peter, Ritchken (2002), "Option Pricing Under Regime Switching", *Quantitative Finance*, vol. 2, pp. 1-17.
- Hull, John C. (2007), *Fundamentals of Futures and Options Markets and Derivagem Package*, 6th Edition, Prentice Hall.
- Jamshidian, F. and M. Fein (1990), "Closed Form Solutions for Oil Futures and European Options in The Gibson Schwartz model: a comment", Working Paper, Merrill Lynch Capital Markets.
- Khaliq, Q. M., D. A. Voss and S. H. K. Kazmi (2006), "A linearly Implicit Predictor Corrector Scheme for Pricing American Options Using a Penalty Method Approach", *Journal of Banking and Finance*, vol. 30, pp. 489-502.
- Neisy, Abdolsadeh (2008), "Least-squares Method For Estimating Diffusion Coefficient Iranian", *International Journal of Engineering Science*, vol. 19, no. 1-2, pp. 17-19.
- Oksendal, Bernt (1998), *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Smith, G. D. (1998), *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford.
- Wilmott, John (2006), *Paul Wilmott on quantitative finance*, Wileyand Sons.